e3a 2016 - PSI 2
Un corrigé

Partie I

1. $t \mapsto t^s \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et on a un unique problème au voisinage de 0. Or, $t^s\ln(t) = o\left(t^{\frac{s-1}{2}}\right)$ (le quotient vaut $t^{\frac{s+1}{2}}\ln(t)$ qui est de limite nulle en 0 par croissances comparées car $s+1>0$) et $\frac{s-1}{2} > -1$. On a donc intégrabilité au voisinage de 0 (comparaison aux fonctions de Riemann) et J_s existe. Une intégration par parties ($t \mapsto t^{s+1}$ et $\ln$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$) donne
$$\int_\varepsilon^1 t^s \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{s+1}\int_\varepsilon^1 t^s \,\mathrm{d}t.$$
Le crochet admet une limite nulle pour $\varepsilon \to 0$ par croissances comparées et on trouve $\boxed{J_s = -\frac{1}{(s+1)^2}}$.
Remarque : ce calcul suffit à justifier l'existence de J_s.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x\ :\ t \mapsto \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1 (car $\ln(t) \underset{t\to1}{\sim} t-1$) et équivalente en 0 à $-t^x\ln(t)$.
Si $x > -1$, f_x est intégrable au voisinage de 0 (question précédente).
Si $x \leqslant -1$, $t f_x(t) \to +\infty$ quand $t \to 0$ et f_x n'est pas intégrale.
Enfin, f_x est positive et son intégrabilité équivaut à l'existence de son intégrale. Ainsi $\boxed{D_H =]-1,+\infty[}$.

(b) Si $x \leqslant y$ alors pour tout $]0,1[$, $t^x = \exp(x\ln(t)) \geqslant \exp(y\ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t) \leqslant 0$). On multiplie par $\frac{\ln(t)}{t-1} \geqslant 0$ et on intègre sur $]0,1[$ quand $x > -1$. On trouve que $\forall -1 < x \leqslant y,\ H(x) \geqslant H(y)$ et $\boxed{H \text{ est donc décroissante}}$ sur son domaine.

(c) La fonction proposée est continue sur $]0,1[$, de limite nulle en 1 (car $\ln(t) \sim_1 (t-1)$) et de limite nulle en 0 (par croissances comparées et car $\alpha > 0$). Ainsi, cette fonction est prolongeable en une fonction continue sur le SEGMENT $[0,1]$ et donc $\boxed{\text{bornée sur ce segment.}}$

(d) On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres.
H1 $\forall t \in]0,1[,\ x \mapsto \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$. (Le programme n'exige pas de préciser que $\forall x > -1,\ t \mapsto \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.)
H2 $\forall x > -1,\ t \mapsto \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ par la question 2.(a).
H3 $\forall x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[,\ \forall t \in]0,1[,\ \left|\frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\right| \leqslant \frac{t^a(\ln(t))^2}{1-t} = \phi_a(t)$.
Lorsque $a > 0$, ϕ_a est continue sur $]0,1[$ et borné (question précédente) et donc intégrable sur le SEGMENT $[0,1]$.
Lorsque $-1 < a \leqslant 0$, on a toujours ϕ_a est continue sur $]0,1[$ de limite nulle en 1, et $\phi_a(t) = \underset{t\to0^+}{o}\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ avec $-a < \gamma < 1$ donc ϕ_a est intégrable au voisinage de 0^+ par comparaison à une intégrale de Riemann convergente puis sur $]0,1[$.
Le théorème s'applique et indique que $\boxed{H \in \mathscr{C}^1(]-1,+\infty[)}$ avec $\forall x > -1,\ H'(x) = \int_0^1 \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\mathrm{d}t$.

La fonction intégrée étant négative H' est négative sur $]-1,+\infty[$ et

$\boxed{\text{on retrouve la décroissance de } H.}$

(e) **Rédaction soufflée par l'énoncé :** On applique le théorème de convergence dominée à
$$f_n : t \in]0,1[\mapsto \frac{t^{x_n}\ln t}{t-1} = \frac{\mathrm{e}^{x_n \ln t}\ln t}{t-1}$$
avec $(x_n) \in D_H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to +\infty$. On va dominer par une fonction semblable à celle de (c), notons qu'à partir d'un certain rang, $x_n \geqslant 1$. On peut, sans perte de généralité (ça ne change pas la limite), supposer que ce rang est 0, ie $\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_n \geqslant 1$.
H1 Pour tout $t \in]0,1[$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, (le programme n'exige pas de préciser que les fonctions f_n et l'application nulle sont continue par morceaux sur $]0,1[$.)
H2 $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall t \in]0,1[,\ \ |f_n(t)| \leqslant \frac{t\ln t}{t-1} = \psi(t)$ avec ψ continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0) et 1 (valeur 1) donc intégrable.
On en déduit que $H(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$ et, par caractérisation séquentielle $\boxed{H(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$

Autre rédaction possible : Soit $x > 0$. La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0) et 1 (valeur 1). C'est donc une fonction bornée sur $]0,1[$. Une majoration grossière donne
$$\forall x > 0,\ |H(x)| \leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{\|g\|_\infty}{x}$$
On en déduit que $\boxed{H(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$ et en particulier (caractérisation séquentielle) que $H(x_n) \to 0$ si $x_n \to 0$.

(f) On a $\boxed{H(x) - H(x+1)} = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = -J_x = \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$ d'après la question 1.

(g) H étant continue en 0 (et même dérivable), $H(x+1) \to H(0)$ quand $x \to -1$ est négligeable devant $1/(x+1)^2$ au voisinage de -1.
Ainsi la question précédente donne $\boxed{H(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}.}$

(h) i. $\frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$ qui est le terme général positif d'une série convergente (Riemann).
Par comparaison, $\boxed{\sum_{k\geqslant1} \frac{1}{(x+k)^2} \text{ converge.}}$

ii. Soit $n \geqslant 1$. Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $H(x+k-1) - H(x+k) = \frac{1}{x+k}$, en sommant et en télescopant dans le membre de gauche, $\boxed{H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n).}$

iii. Comme H est de limite nulle en $+\infty$ (2.(e)) et comme la série converge, on peut faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir $\boxed{H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.}$

En particulier, $\boxed{H(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \text{ et } H(1)=H(0)-1=\frac{\pi^2}{6}-1.}$

Partie 2

1. $h_x\ :\ t\mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ décroît sur $]-x,+\infty[$ et donc sur $]1,+\infty[$. On en déduit que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ h_x(k+1)\leqslant \int_k^{k+1} h_x(t)\,dt\leqslant h_x(k)$$

c'est-à-dire $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(x+k+1)^2}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{dt}{(x+t)^2}\leqslant\frac{1}{(x+k)^2}}$

2. Sommons ces inégalités pour $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k+1)^2}\leqslant\int_1^{n+1}\frac{dt}{(x+t)^2}=\left[-\frac{1}{t+x}\right]_{t=1}^{t=n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}$$

Tous les termes admettent une limite quand $n\to+\infty$ et le passage à la limite donne

$$H(x)-\frac{1}{(x+1)^2}\leqslant\frac{1}{1+x}\leqslant H(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{1+x}\leqslant H(x)\leqslant\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}$$

Majorant et minorant possédant en $+\infty$ l'équivalent commun $\frac{1}{x}$, on en déduit que $\boxed{H(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}.}$

3. (a) $H(n)\sim\frac{1}{n}$, le termé général positif d'une série divergente donc $\boxed{\sum_n u_n \text{ diverge.}}$

$(u_n)=(H(n))$ décroît et tend vers 0, donc, par théorème spécial sur des séries alternées,

$$\boxed{\sum(-1)^n u_n \text{ converge.}}$$

(b) Ici, le théorème d'inversion N_1 ne s'applique pas car la série $\sum_n u_n$ diverge, et comme on n'intègre pas sur un segment, inutile de s'intéresser à la converge uniforme. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée soit aux sommes partielles (série géométrique), soit au reste (via le TSSA). On choisit (arbitrairement) les sommes partielles. Notons $S_n\ :\ t\mapsto\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^k\ln(t)}{t-1}$.

H1 (S_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers $t\mapsto\frac{\ln(t)}{t^2-1}$ (on reconnaît en $\sum((-1)^n t^n)$ une série géométrique convergente). (Le programme n'exige pas de vérifier que toutes ces fonctions sont continues par morceaux sur $]0,1[$.)

H2 Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in]0,1[$, $|S_n(t)|=\left|\frac{(1-(-t)^{n+1})\ln(t)}{t^2-1}\right|\leqslant\frac{2|\ln(t)|}{1-t^2}=\varphi(t)$.

ϕ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1 (valeur 1) et $o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0 (équivalent à $\ln(t)$), donc est donc intégrable sur $]0,1[$.

Par théorème de convergence dominée, on a $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.}$

(c) $v\mapsto v^2$ étant de classe C^1 sur $]0,1[$ à dérivée qui ne s'annule pas, on peut effectuer le changement de variable $u=v^2$ pour obtenir $\boxed{\int_0^1\frac{\ln(v)}{v^2-1}\,dv=\int_0^1\frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{4}H\left(-\frac{1}{2}\right).}$

Partie 3

1. (a) Sous réserve d'existence, une intégration par parties donne

$$I_{p,q}=\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln(t))^q\right]_0^1-\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p\ln(t)^{q-1}\,dt$$

Le terme tout intégré est de limite nulle en 0 (croissances comparées) et ceci légitime l'intégration par parties (et l'énoncé admet l'existence des $I_{p,q}$) et donc $\boxed{I_{p,q}=-\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}.}$

(b) On prouve alors par récurrence (sur q) que $\boxed{I_{p,q}=(-1)^q\frac{q!}{(p+1)^q}I_{p,0}=(-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.}$

2. (a) $t\mapsto\frac{(\ln t)^{n+1}}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$, négligeable devant $1/\sqrt{t}$ au voisinage de 0 (croissances comparées) et prolongeable par continuité en 1 (valeur 1 si $n=0$ et 0 si $n\geqslant 1$). C'est donc une fonction intégrable sur $]0,1[$ et $\boxed{B_n \text{ existe.}}$

(b) On sait que $\forall t\in]0,1[$, $\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{+\infty}t^k$. Posons donc $g_k\ :\ t\mapsto(\ln t)^{n+1}t^k$ (n est fixé).

H1 $\sum g_k$ converge simplement sur $]0,1[$ (Le programme n'exige pas de vérifier sa somme $t\mapsto\frac{(\ln t)^{n+1}}{t-1}$ est continue ar morceaux sur $]0,1[$.)

H2 Les g_k sont toutes continues sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité à $[0,1]$, donc intégrables sur $]0,1[$.

H3 $\int_0^1|g_k|=(-1)^{n+1}\int_0^1 g_k=(-1)^{n+1}I_{k,n+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente car $n+2\geqslant 2>1$.

Le théorème d'interversion N_1 s'applique et donne $\boxed{B_n=-\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k=-\sum_{k=0}^{+\infty}I_{k,n+1}.}$

(c) Avec la question 1, on en déduit (avec changement d'indice) que

$$\boxed{B_n=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}=(-1)^n(n+1)!Z_{n+2}.}$$

3. Avec la série exponentielle, on a $\forall x>-1,\ H(x)=\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\ln t)^{k+1}}{t-1}\frac{x^k}{k!}\mathrm{d}t.$

La convergence N_1 n'étant pas facile à mettre en œuvre ici sans connaissance sur les séries entières, on applique le théorème de convergence dominée aux sommes partielles (exponentielles).

Fixons $x \in]-1,1[$ et notons $h_k \ : \ t \mapsto \dfrac{(\ln t)^{k+1}}{t-1} \dfrac{x^k}{k!}$.

H1 $\sum h_k$ converge simplement sur $]0,1[$.

H2 On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1[,\ \left|\sum_{k=0}^{n} h_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |h_k(t)| = \dfrac{t^{-|x|}|\ln(t)|}{|t-1|} = \phi(t)$. Comme $|x|<1$, $-|x|>-1$ et ϕ est continue et bien intégrable sur $]0,1[$.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir somme et intégrale et conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) Z_{k+2} x^k.}$$