Programme de colle – MPI

Réduction

Révision de la première partie du chapitre, à laquelle s'ajoute

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x)=\lambda x$, alors $P(u)(x)=P(\lambda)x$.
Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	
h) Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1,\dots,P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u))=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	
i) Polynômes annulateurs et réduction	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle.
j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.	Dimension d'un sous-espace caractéristique.
Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	

Semaine prochaine : Continuité, compacité, connexité par arcs.

Questions de cours

Les questions de cours $*$ peuvent être posées à MM. Marinia, Passot (groupe 1), Thomas (groupe 2).

(i) Lemme de décomposition des noyaux (pour un produit de deux polynômes).

(ii) u est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme simplement scindé.

(iii) Si F est un sous-espace stable, relation entre polynôme caractéristique (révision), polynôme minimal, diagonalisabilité de l'endomorphisme induit par rapport à ceux de l'endomorphisme. Savoir en déduire les sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.

(iv) $*$ Caractérisation de la trigonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé.

(v) $*$ Théorème de Cayley-Hamilton.

(vi) $*$ Propriétés des sous-espaces caractéristiques : ce sont des sous-espaces stables, supplémentaires, de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. Matrice dans une base adaptée.

(vii) **CCINP 65** : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

(viii) **CCINP 88** :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i=j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question a).

(ix) **CCINP 91** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A. Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

(x) **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.

   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.