Programme de colle – MPI

Espaces vectoriels normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé. Distance associée à une norme. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	Vecteurs unitaires. Inégalité triangulaire. On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Normes $\\|\\|_1$, $\\|\\|_2$, $\\|\\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\|\\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA)=k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	Notations $\\|\\|_1$ et $\\|\\|_2$.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.
j) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Semaine prochaine : Réduction des endomorphismes (point de vue algébrique).

Questions de cours

(i) Montrer qu'une norme euclidienne est bien une norme.

(ii) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

(iii) Norme N_∞ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Normes N_1 et N_2 sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

(iv) Comparaisons (les 6) des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, avec cas d'égalité pour chaque comparaison.

(v) Comparaisons des normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

(vi) Toutes les définitions concernant la topologie.

(vii) Stabilité par réunion et intersection (finie ou non selon les cas) de voisinages, ouverts, fermés, avec contre-exemples. Stabilité par produit fini d'ouverts ou de fermés.

(viii) L'adhérence est le plus petit fermé contenant la partie.
L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.

(ix) Caractérisations séquentielles des fermés et des points adhérents.

(x) **CCINP 34** : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in A$ et $x_n\to x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

(xi) **CCINP 37** : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f\in E,\ N_\infty(f)=\sup\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|$ et $N_1(f)=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k>0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f)\leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(xii) **CCINP 44** : Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A\subset B\Longrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E=\mathbb{R}$).

(xiii) **CCINP 45** : **Les questions 1. et 2. sont indépendantes**.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x\in E,\ d_A(x)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$.
   (b) Soit $x\in E$. Prouver que $d_A(x)=0\Longrightarrow x\in\overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \forall t\in[0,1],\ d_A(tx+(1-t)y)\leqslant t\,d_A(x)+(1-t)d_A(y).$$

   Prouver que A est convexe.