21

Limite, continuité, compacité et connexité par arcs

On se donne $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d_E, d_F, d_G les distances associées à la norme pour chaque espace.

On fixe A et B des parties non vides de E et F respectivement.

I Limite

1 Limite en un point

Soit $f \in F^A$, $a \in \overline{A}$, $b \in F$.

Définition 1 : Limite en un point

On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in A$,

Remarque

R 1 – Définitions équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ x \in B_E(a,\eta) \Longrightarrow f(x) \in B_F(b,\varepsilon)$$

$$\forall V \text{ vois. de } b,\ \exists W \text{ vois. de } a,\ f(A \cap W) \subset V$$

$$\forall V \text{ vois. de } b,\ \exists W' \text{ vois. de } a \textbf{ dans } A,\ f(W') \subset V$$

$$\|f(x) - b\| \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

$$f(a+h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} b$$

R 2 – Cette définition dépend des normes. Mais en changeant une norme en une norme équivalente on ne change pas la définition.

Propriété 1 : Convergente $\Rightarrow$ localement bornée

Si f admet b comme limite en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 2 : Caractérisation séquentielle

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$.

Propriété 3 : Unicité de la limite

Si $f \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $f \xrightarrow[x \to a]{} b'$, alors $b = b'$.

Propriété 4 : Limite par majoration de la différence

Si $g \in \mathbb{R}^A$ telle que $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et si, au voisinage de a, $\|f(x) - b\| \leqslant g(x)$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$.

Propriété 5 : Limites de normes

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, $\|f(x)\|_F \xrightarrow[x \to a]{} \|b\|_F$.

2 Cas où F est de dimension finie

Propriété 6 : Limite coordonnée à coordonnée

Si F est de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F, $f \in F^A$, $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in F$.

On note $f_k \in \mathbb{K}^A$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_k$.

3 Fonction à valeurs dans un espace produit

Propriété 7

Si $(F_1, N_1), \dots, (F_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on munit $F_1 \times \cdots \times F_p$ de la norme produit N.

Si $f \in (F_1 \times \cdots \times F_p)^A$, $a \in \overline{A}$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $f_i \in F_i^A$ tel que $f : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$.

Soit $b = (b_1, \dots, b_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

Alors $f \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_i$.

4 Opérations algébriques

La caractérisation séquentielle permet de prouver facilement les propriétés sur les opérations algébriques sur les limites.

Propriété 8 : Opérations sur les limites

Soient $f, g \in F^A$, $h \in \mathbb{K}^A$ telles que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in F$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} b' \in F$, $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \in \mathbb{K}$.

(i) *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + \lambda g \xrightarrow[x\to a]{} b + \lambda b'$.*

(ii) $h(x) \cdot f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \cdot b$.

(iii) *Si $\alpha \neq 0$ et h ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{1}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\alpha}$.*

Propriété 9 : Compositions de limites

Si $f \in F^A$, telle que $f(A) \subset B$, $g \in G^B$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in G$ tels que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$.

Exemple

E 1 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ en $(0, 0)$.

E 2 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{|x - y|}$ en $(0, 0)$.

5 Extension à l'infini

Définition 2 : Limite pour $\|x\| \to +\infty$

Si A non bornée, $f \in F^A$, $b \in F$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E \to +\infty]{} b$ lorsque

Définition 3 : Limite vectorielle en $+\infty$

Si $A \subset \mathbb{R}$, $f \in F^A$, $b \in F$.

(i) Si A n'est pas majorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ lorsque

(ii) Si A n'est pas minorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} b$ lorsque $f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ c'est-à-dire

Définition 4 : Limite infinie en un vecteur

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in \overline{A}$.

(i) On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ lorsque

(ii) On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ lorsque $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ c'est-à-dire

Remarque

R 3 – Reste les définitions vues en première année de $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$ lorsque $E = F = \mathbb{R}$:

- Pour A majorée
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M' \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ie

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M' \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

- Pour A minorée
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ ssi $f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ie

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M' \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

  - ⋆ Pour A minorée : $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ ssi $-f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, , ie

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M' \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

R 4 – On définit de même $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E\to+\infty]{} \pm\infty$.

R 5 – La caractérisation séquentielle de la limite est encore valable pour l'infini, avec une démonstration similaire.

R 6 – On peut unifier toutes ces définitions en introduisant une notion de voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}$: un voisinage de $+\infty$ est une partie V telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]M, +\infty[\subset V$, un voisinage de $-\infty$ est une partie V telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, M[\subset V$.
Alors toutes les définitions de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ s'écrivent

$$\forall V \text{ voisinage de } b,\ \exists W \text{ voisinage de } a,\ f(A \cap W) \subset V$$

II Relations de comparaison

Définition 5 : Relations de comparaison

Soit $f, g \in F^A$ où A partie de E, $\varphi \in \mathbb{R}^A$, $a \in \overline{A}$. Si A est une partie non minorée ou non majorée de $\mathbb{R}$, a peut aussi être $\pm\infty$.

- f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(\varphi(x))$ lorsqu'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap A, \quad \|f(x)\|_F \leqslant M|\varphi(x)|.$$

Cela revient à dire que $\|f(x)\|_F = \mathcal{O}(|\varphi(x)|)$.

Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $x \mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$ ou encore $x \mapsto \dfrac{\|f(x)\|_F}{|\varphi(x)|}$ est bornée au voisinage de a.

- f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap A, \quad \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|.$$

Cela revient à dire que $\|f(x)\|_F = \mathrm{o}(|\varphi(x)|)$.

Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $\dfrac{\|f(x)\|_F}{|\varphi(x)|} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f(x) - g(x)$ est négligeable devant $\|f(x)\|_F$ ou devant $\|g(x)\|_F$ (cela revient au même) au voisinage de a :

$$f(x) - g(x) = \mathrm{o}(\|f(x)\|)_F \text{ ou } \mathrm{o}(\|g(x)\|)_F.$$

III Continuité

1 En un point, sur une partie

Soient $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$.

Définition 6 : Continuité

f est **continue en** a lorsque f admet une limite (finie) en a.

f est **continue sur** A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Propriété 10

Si f est continue en a, la limite de f en a vaut $f(a)$.

Propriété 11 : Caractérisations séquentielles

f est continue en a si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a)$$

si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a,\ (f(a_n)) \text{ converge}.$$

Propriété 12 : Opérations

- *Si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ l'est aussi.*
- *Toute combinaison linéaire, toute composée de fonctions continues est continue.*
- *Si $f : A \to F$ et $h : A \to \mathbb{K}$ sont continues, $h \cdot f$ l'est aussi. Si h ne s'annule pas, $\frac{1}{h} \cdot f$ l'est aussi.*

Remarque

R 7 – $\mathscr{C}(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemple

E 3 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon.

E 4 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y^2}{|x| + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon.

2 Continuité et topologie

Propriété 13 : Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue

L'image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé) relatif de l'ensemble de départ.

Remarque

R 8 – Rappel : $f^{(-1)}\left(B^c\right)=\left(f^{(-1)}(B)\right)^c$.

Exemple

E 5 – $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Remarque

R 9 – Si $f:A\to\mathbb{R}$ est continue, $a\in\mathbb{R}$, $\{x\in A,\ f(x)>a\}$ et $\{x\in A,\ f(x)<a\}$ sont des ouverts de A, $\{x\in A,\ f(x)\geqslant a\}$, $\{x\in A,\ f(x)\leqslant a\}$ et $\{x\in A,\ f(x)=a\}$ sont des fermés de A.

R 10 – Ce n'est plus vrai pour les images directes. Exemples : $\sin(]0,4\pi[)$ et $\mathrm{Arctan}(\mathbb{R})$.

Propriété 14 : Applications continues coïncidant sur une partie dense

Des applications continues coïncidant sur des parties denses sont égales.

Exercice 1 : CCINP 35

3 Uniforme continuité

Définition 7 : Uniforme continuité

Soit $f:A\subset E\to\mathbb{F}$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si
$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\eta>0,\ \ \forall x,y\in A,$

$$\|x-y\|_E\leqslant\eta\Longrightarrow\|f(x)-f(y)\|_F\leqslant\varepsilon.$$

Remarque

R 11 – À ne pas confondre avec f continue sur A :
$\forall a\in A,\ \ \forall\varepsilon>0,\ \ \exists\eta>0,\ \ \forall x\in A,$

$$\|x-a\|_E\leqslant\eta\Longrightarrow\|f(x)-f(a)\|_F\leqslant\varepsilon.$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Propriété 15 : Uniformément continue ⇒ continue

Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A. Réciproque fausse.

Propriété 16 : Opérations sur les applications uniformément continues

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Remarque

R 12 – ⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Exemple

E 6 – $x\mapsto|x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ mais pas $x\mapsto x^2$.

4 Fonctions lipschitziennes

Définition 8 : Fonction lipschitzienne

$f:A\subset E\to F$ est dite k-**lipschitzienne** sur A (où $k\in\mathbb{R}_+^*$ si

$$\forall x,x'\in A,\ \ \left\|f(x)-f(x')\right\|_F\leqslant k\left\|x-x'\right\|_E.$$

Propriété 17 : Lipschitzienne ⇒ continue

Toute fonction lipschitzienne sur A y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Exemple

E 7 – $x\mapsto\|x\|$

Propriété 18 : Lispschziannité de la distance à une partie

$\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & d(x,A)\end{array}\right.$ *est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

C'est en particulier le cas de $x\mapsto d(x,a)$ où $a\in E$ avec $A=\{a\}$.

Exemple

E 8 – On retrouve que les boules ouverte/fermée le sont, et que les sphères sont fermées.

5 Applications linéaires

Remarque

R 13 – Pour une application linéaire, on peut toujours déplacer un problème en un point donné en un problème en 0_E, et la continuité revient à une lipschitziannité, et donc une uniformité continue.

Propriété 19 : Continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est continue sur E.*

(ii) *u est continue en 0_E.*

(iii)

(iv) *u est lipschitzienne sur E.*

(v) *u est uniformément continue sur E.*

Remarque

R 14 – Ce qui importe vraiment en pratique, c'est $(i) \iff (iii)$.

Notation 1

On note $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{C}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E.

Remarque

R 15 – $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Exemple

E 9 – $\varphi : f \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), N_\infty) \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in (\mathbb{C},|\cdot|)$ est continue.
Elle est aussi continue si on munit $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ de la norme N_1 de la convergence en moyenne.

E 10 – $f \in (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}),\|\cdot\|_1) \mapsto f(0) \in (\mathbb{C},|\cdot|)$ est non continue .

Méthode 1 : Étudier la continuité d'une application linéaire

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$... Sauf si on est en dimension finie **au départ** : dans ce cas, c'est automatique.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$) , ou encore, comme pour nier une domination de normes, une suite telle que $\left(\frac{\|u(x_n)\|_F}{\|x\|_E}\right)_n$ n'est pas bornée.

Remarque

R 16 – La continuité dépend des normes au départ et à l'arrivée, mais ne change pas en prenant des normes équivalentes.

R 17 – La domination de norme est équivalente à la continuité de l'endomorphisme id_E pour ces normes.

Exercice 2 : CCINP 36

6 Applications multilinéaires

Propriété 20 : Continuité des applications multilinéaires

Si $E_1,\ldots,E_p,F$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ est multilinéaire, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est continue*

(ii)

Corollaire 1 : Continuité d'un produit scalaire

IV Dimension finie

1 Coordonnées

Propriété 21 : Continuité coordonnée à coordonnée

On suppose F de dimension finie $n > 1$.

Soit A une partie non vide de E, $f \in F^A$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. On pose $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est continue sur A.

2 Applications linéaires

Théorème 1 : Continuité des applications linéaires en dimension finie

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue sur E.

Autrement dit, $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$.

Remarque

R 18 – Une domination de norme étant une continuité d'application linéaire (id_E), on a réciproquement que la continuité de tout endomorphisme sur E implique l'équivalence de toute norme de E.

Exercice 3

Montrer que si $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PAP^{-1}$ **est continue.**

Exercice 4

Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3 Applications polynomiales

Définition 9 : Applications polynomiales

Soit $f : E \to \mathbb{K}$, où E est de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, \ldots, x_p$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

f est dite **monomiale** s'il existe $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}^p$ tels que

f est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions monomiales.

Remarque

R 19 – En changeant de base, les anciennes coordonnées sont transformées en combinaisons linéaires de nouvelles coordonnées. Ainsi, le caractère polynomial d'une fonction ne dépend pas de la base.

Propriété 22 : polynomiale ⇒ continue

Toute fonction polynomiale sur E de dimension finie est continue.

Exercice 6

Montrer que $\det$ **est continue sur** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7

$M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ **est continue sur** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8

$\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ **est ouvert .**

4 Applications multilinéaires

Propriété 23 : Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E, \|\!|\!|_E)$, $(F, \|\!|\!|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(G, \|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Propriété 24 : Généralisation

Plus généralement, toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.

Exemple

E 11 – Si $\mathscr{B}$ base de E de dimension finie, $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire de E donc est continue.

V Normes d'opérateurs

1 Cas des applications linéaires

Définition 10 : Norme subordonnée

On considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Si $u \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on pose

Propriété 25 : C'est une norme

*$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$ appelée **norme subordonnée** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On parle aussi de **norme d'opérateur**.*

Remarque

R 20 – Si $u \in \mathscr{L}_x(E, F)$,

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

et $|||u|||$ est le plus petit k tel que pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E.$$

Propriété 26 : Norme subordonnée d'une composée

On considère trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$. Si $u \in \mathscr{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}_c(F, G)$ et $|||\cdot|||_{E,F}$ désigne la norme subordonnée sur $\mathscr{L}_c(E, F)$ par exemple, alors

Corollaire 2 : Cas des endomorphismes

Ici, $E = F$. Si $u \in \mathscr{L}_c(E)$, on définit

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_E}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_E.$$

Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E)$ qui vérifie $|||\mathrm{id}_E||| = 1$ et

$$\forall u, v \in \mathscr{L}_c(E), \quad |||v \circ u||| \leqslant |||u||| \cdot |||v|||.$$

*On dit que $|||\cdot|||$ est une **norme d'algèbre unitaire**.*

Propriété 27 : Puissance d'une norme subordonnée

Pour tout $u \in \mathscr{L}_c(E)$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left|\left| u^k \right|\right|\right| \leqslant |||u|||^k.$$

Méthode 2 : Calcul d'une norme subordonnée

Pour calculer la norme subordonnée d'un opérateur (ie d'une application linéaire), on écrit des majorations

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant \cdots = \cdots \leqslant \cdots = \cdots \leqslant k \|x\|_E$$

en effectuant des majorations les plus fines possibles et en distinguant clairement les majorations et les égalités, afin de pouvoir traiter plus facilement les cas d'égalité.

Soit on trouve au moins un cas d'égalité, c'est-à-dire un $x \in E$ tel que $\|u(x)\|_F = k \|x\|_E$, alors $k = |||u|||$ (et le $\sup$ est en fait un $\max$).

S'il n'y a pas de cas d'égalité, on cherche une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E \setminus \{0_E\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{\|u(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \to k$ et alors $k = |||u|||$ (car le $\sup$ est le seul majorant limite d'une suite de l'ensemble).

Exercice 9 : CCINP 38

2 Traduction matricielle

Propriété 28 : Norme subordonnée matricielle

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On définit, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|||A||| = \sup_{X \neq 0_{n,1}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\| = 1} \|AX\|$$

*appelée **norme subordonnée** à $\|\cdot\|$.*

Il s'agit d'une norme d'algèbre unitaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc vérifiant

$$|||I_n||| = 1$$
$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||AB||| \leqslant |||A||| \, |||B|||$$

ce qui implique

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|\left|\left| A^k \right|\right|\right| \leqslant |||A|||^k.$$

VI Compacité

1 Suites extraites

Définition 11 : Suite extraite

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in E^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n.$$

Propriété 29 : Limite d'une suite extraite convergente

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition 12 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans E) de suite extraite de u.

Propriété 30 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Réciproque fausse.

Corollaire 3 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété 31 : Condition suffisante de convergence

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Exercice 10

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est fermé.

2 Parties compactes

a Définition

Définition 13 : de Bolzano-Weierstrß

Une partie K de E est dite **compacte** (ou est **un compact**) lorsque

Remarque

R 21 – $\varnothing$ est compacte.

R 22 – Par théorème de Bolzano-Weierstraß, tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

b Un compact est fermé borné

Propriété 32 : compact ⇒ fermé et borné

Toute partie compacte est

Remarque

R 23 – La réciproque est fausse en général, mais on va voir qu'elle est vraie en dimension finie.

R 24 – Tout compact de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment.

Exemple : Contre-exemple de partie fermée bornée non compacte

E 12 – Dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |p_k|$ (avec des notations évidentes), Montrer que $S(0,1)$ est une partie fermée bornée non compacte en utilisant $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11 : CCINP 13

c Partie fermée d'un compact

Propriété 33 : Partie fermée d'un compact

Soit K une partie compacte de E et A une partie de K.

Remarque

R 25 – La réciproque est vraie ! Ainsi les parties de K fermées sont exactement les parties de K compactes.

R 26 – Parle-t-on de fermé de E ou de fermés relatifs de K ? En fait, c'est la même chose car le compact K est fermé. Il n'y a donc pas d'ambiguïté.

R 27 – En dimension finie, ce ne sera pas très intéressant car on va montrer que les compacts en général sont exactement les fermés bornés.

d Produit de compacts

Propriété 34 : Produit de compacts

Si $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p))$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et pour $i \in [\![1, p]\!]$, K_i compact de E_i, alors $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme produit.

Remarque

R 28 – La démonstration est intéressante, mais dans la pratique, en cas d'extractions multiples, il est légitime de se poser la question : peut-on faire apparaître un produit de compact ?

3 Fonctions continues sur des compacts

Propriété 35 : Image continue d'un compact

Si $f : K \to F$ avec K partie compacte de E et f continue, alors

Remarque

R 29 – L'image continue d'un compact est compacte, et donc en particulier fermée et bornée.

R 30 – À ne pas confondre avec la propriété qui dit que l'image **réciproque** d'une partie relativement ouverte ou fermée de F l'est encore dans E.

Corollaire 4 : théorème des bornes atteintes

Remarque

R 31 – Trèèèès utile ! Et avec un petit goût de déjà-vu...

Théorème 2 : de Heine

4 Cas de la dimension finie

a $\mathbb{K}$

On a déjà vu que les segments de $\mathbb{R}$ étaient des compacts de $\mathbb{R}$.

Le théorème de Bolzano Weierstrß permet de démontrer le résultat suivant, généralisé un peu plus loin.

Théorème 3 : de Bolzano-Weierstraß

De toutes suite bornée d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire 5 : Compacts de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Les compacts du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}$.

Remarque

R 32 – Les segments de $\mathbb{R}$ sont alors exactement les **intervalles** compacts de $\mathbb{R}$.

Mais il existe bien d'autre compacts qui ne sont pas des intervalles.

Par exemple, un ensemble fini est toujours compact (pourquoi? – et c'est valable dans n'importe quel espace vectoriel normé).

Cependant, tout compact de $\mathbb{R}$ étant fermé et borné, il est inclus dans $[\inf K, \sup K] = [\min K, \max K]$ (le caractère fermé assurant le fait que les bornes soient atteintes).

Ainsi, les propriétés vraies « sur tout segment de $\mathbb{R}$ » sont aussi les propriétés vraies « sur tout compact de $\mathbb{R}$. »

b Équivalence des normes

Théorème 4 : Équivalence des normes en dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Lemme 2

Les compacts de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ sont exactement les parties fermées et bornées de $(\mathbb{K}^n, \|\|_\infty)$.

Remarque

R 33 – On généralise à tout espace vectoriel normé de dimension finie ci-après.

c Compacts en dimension finie

Théorème 5 : Compacts en dimension finie

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.

Corollaire 6 : Traduction en terme de valeur d'adhérence

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire 7 : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire 8 : important!

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Exercice 12 : classique

Tout sous-espace strict d'un espace vectoriel normé est d'intérieur vide.

Exercice 13 : Trèèèèès classique

$\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\top M = I_n\}$ **est compact.**

Remarque

R 34 – Le théorème de Riesz (HP) dit qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Exercice 14 : Mines

Montrer que la boule unité fermée de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme N_∞ n'est pas compacte.

5 Suites convergente dans un compact

Propriété 36 : CNS de convergence dans un compact

Corollaire 9 : CNS de convergence des suites bornées en dimension finie

En dimension finie, *toute suite* ***bornée*** *converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

VII CONNEXITÉ PAR ARCS

1 Une relation d'équivalence

Définition 14 : chemin continu

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Si $(a,b) \in A^2$, on appelle **chemin continu** joignant a à b dans A toute application $\phi : [0,1] \mapsto E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

-
-
-

Propriété 37 : Relation d'équivalence

La relation $\mathscr{R}$ sur A^2 « sont joints par un chemin continu » est une relation d'équivalence.

2 Connexité par arcs

Définition 15 : Composantes connexes par arcs

Soit A une partie de E. On appelle **composantes connexes par arcs** de A

Remarque

R 35 – La composante connexe par arc de $a \in A$ est l'ensemble des $b \in A$ pouvant être joints à a par un chemin continu.

Propriété 38 : Partition des composantes connexes

Les composantes connexes par arcs de A partitionnent A.

Exemple

E 13 – $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 0\}$ possède quatre composantes connexes par arcs.

Définition 16 : partie connexe par arcs

On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'

Remarque

R 36 – A est connexe par arcs si tout couple de points est joignable par un chemin continu dans A.

Propriété 39 : convexe $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition 17 : Partie étoilée

A est dite **étoilée** s'il existe un point $a \in A$ tel que

Remarque

R 37 – Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Propriété 40 : étoilée $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

3 Cas des parties de $\mathbb{R}$

Propriété 41 : Connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont

Remarque

R 38 – Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les convexes. C'est faux en général, par exemple dans $\mathbb{R}^2$.

4 Image continue d'une partie connexe par arcs

Propriété 42 : Image continue d'une partie connexe par arcs

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, A une partie connexe par arcs de E, $f : A \to F$ une application continue, alors

Remarque

R 39 – Pour les ouverts et les fermés, c'est l'image **réciproque** par une application continue qui est ouverte ou fermée.
Pour les compacts ou les connexes par arcs, c'est l'image **directe** par une application continue qui est compacte ou connexe par arcs.

Corollaire 10 : Cas d'une fonction réelle, TVI

Si f est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est

Autrement dit, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires :

Remarque

R 40 – Si, pour résoudre une question, on a envie d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, mais si on a une application (continue) qui n'est pas définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut penser à se demander si l'application ne serait pas, par hasard, définie sur une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé...

VIII Topologie matricielle (HP)

Rien n'est explicitement au programme dans les exercices suivants, mais ils sont tous très classiques.

On est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, la convergence se fait cœfficient à cœfficient. On peut expliciter les normes usuelles $\|A\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right|^2}$ ($= \operatorname{tr}(A\cdot A^\top)$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\operatorname{tr}\left(A\cdot \overline{A}^\top\right)$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), $\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right|$ qui ne sont pas les plus pratiques car ce ne sont pas des normes d'algèbres vérifiant $N(AB)\leqslant N(A)N(B)$. On leur préfère pour des applications pratiques (voir séries matricielles) des normes subordonnées sans nécessairement avoir à les expliciter. Voir TD pour des exercices sur ces normes subordonnées.

Exercice 15 : Montrer de deux manières différentes que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire que si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Exercice 16 : Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 17 : Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices symétriques sont fermés.

Exercice 18 : Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(n) = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ MM^\top = I_n\}$ des matrices orthogonales est compact.

Exercice 19 : Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 20 : L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense ?

On pourra considérer l'application qui à une matrice 2×2 associe le discriminant de son polynôme caractéristique.

Exercice 21 : Montrer que l'ensemble des matrice de rang $p\in[\![1,n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p=0$ et $p=n$.

Exercice 22 : Montrer que l'application qui à $M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse est continue.

Exercice 23 : Montrer que l'application qui à $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son polynôme minimal et l'application rang ne sont pas continue.

Exercice 24 : Donner le cœfficient de degré 1 de χ_A en fonction de la trace et de la comatrice de A.

On suggère de commencer par supposer A inversible et d'exprimer χ_A en fonction de $\chi_{A^{-1}}$.

Exercice 25 : Étudier la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26 : Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.