21

Polynômes d'endomorphismes et de matrices, application à la réduction

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	
Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(P_i(u)\big).$$	
Polynômes annulateurs et réduction	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle.
Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.	Dimension d'un sous-espace caractéristique.
Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	

Table des matières

21 Polynômes d'endomorphismes et de matrices, application à la réduction 1

- **I Polynômes d'endomorphisme et de matrices** 2
  - 1 Rappels . . . 2
  - 2 Propriétés . . . 3
  - 3 Polynômes annulateur . . . 3
    - a Définition . . . 3
    - b Polynômes annulateurs et valeurs propres . . . 4
- **II Lemme de décomposition des noyaux** 6
- **III Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable** 8
- **IV Théorème de Cayley-Hamilton** 9
- **V Polynôme minimal** 10
- **VI Sous-espaces caractéristiques** 14

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Polynômes d'endomorphisme et de matrices

1 Rappels

On a vu que si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit

- $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$
- $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$
- $\Phi_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
- $\Phi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Remarque

R 1 – Ne pas confondre le polynôme P, l'endomorphisme $P(u)$ et la matrice $P(A)$.

R 2 – $\big(P(u)\big)(x)$ existe mais pas $P\big(u(x)\big)$.

R 3 – Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

R 4 – Deux polynômes en u (respectivement A) commutent.

Notation 1 : Ensemble des polynômes en u / A

On note $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im}\Phi_u = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Im}\Phi_A = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Remarque

R 5 – Ne pas dire « Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ » : il n'y a pas unicité en général (Φ_u n'est pas injective).
Préférer « Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)$... ».

Propriété 1 : Structure de sous-algèbre

$\mathbb{K}[u] = \operatorname{Vect}(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Vect}(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-algèbres commutatives de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

Démonstration

Comme image de morphismes d'algèbres. ∎

2 Propriétés

Propriété 2 : Polynômes et similitude

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P\left(Q^{-1}AQ\right) = Q^{-1}P(A)Q$.

Propriété 3 : Cas des matrices diagonales et triangulaires

Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

(i) $P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n))$

(ii) $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

3 Polynômes annulateur

a Définition

Définition 1 : polynôme annulateur

P est un **polynôme annulateur** de u (respectivement A) lors $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exemple

E 1 – Le polynôme nul.

E 2 – Si p est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p.

E 3 – Si s est une symétrie, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

Propriété 4 : Existence d'un polynôme annulateur

(i) *Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u.*

(ii) *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de A.*

Démonstration

Si $n = \dim E$, $\left(\mathrm{id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2}\right)$ (respectivement $\left(I_n, A, \ldots, A^{n^2}\right)$) est liée car n^2+1 vecteurs en dimension n^2. ■

Méthode 1 : Calcul de puissances à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A.
2. Pour un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$, on calcule le reste de la division euclidienne de S pour P : $S = PQ + R$ où $\deg R < \deg P$. C'est plutôt facile lorsque P est scindé simple (Interpolation de Lagrange).
3. On en déduit, entre autres, pour $k \in \mathbb{N}$, avec $S = X^k$, $A^k = R(A)$.

Méthode 2 : Montrer l'inversibilité et déterminer l'inverse à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A avec un terme constant non nul.
2. On en déduit une matrice B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$, l'un des deux suffisant) en isolant I_n.
3. Alors A est inversible, d'inverse B qui s'exprime comme un polynôme en A.

Exercice 1

Si $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, calculer les puissances de A, vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

b Polynômes annulateurs et valeurs propres

Propriété 5 : Image par un polynôme d'endomorphisme

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)(x)$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

Corollaire 1 : Certaines valeurs propres de $P(u)$ et $P(A)$

Si λ est valeur propre de u (respectivement A), alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ (respectivement $P(A)$).

Propriété 6 : Les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$), $\mathscr{Z}(P)$ l'ensemble des racines de P, alors $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathscr{Z}(P)$ (respectivement $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathscr{Z}(P)$).

L'inclusion est stricte en général.

Remarque

R6 – Les valeurs propres sont **parmi** les racines de P

Exemple

E 4 – Si $p^2 = p$ alors $\mathrm{Sp}\, p \subset \{0, 1\}$.

Exercice 2 : CCINP 65

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. **Démontrer que :** $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ **.**
2. (a) **Démontrer que :** $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ **.**
   (b) **Démontrer que, pour tout** $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ **:**

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. **Soit** $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**.**
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

---

1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

   $P = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p X^p$ et $Q = \sum\limits_{q=0}^{m} b_q X^q$.

   Donc $PQ = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{m} \left(a_p b_q X^{p+q}\right)$.

   Donc $(PQ)(u) = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{m} \left(a_p b_q u^{p+q}\right)$ (*)

   Or $P(u) \circ Q(u) = \left(\sum\limits_{p=0}^{n} a_p u^p\right) \circ \left(\sum\limits_{q=0}^{m} b_q u^q\right) = \sum\limits_{p=0}^{n} \left(a_p u^p \circ \sum\limits_{q=0}^{m} b_q u^q\right)$.

   Donc, par linéarité de u, $P(u) \circ Q(u) = \sum\limits_{p=0}^{n} \left(\sum\limits_{q=0}^{m} a_p u^p \circ b_q u^q\right) = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{m} \left(a_p b_q u^{p+q}\right)$. (**)

   D'après (*) et (**), $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
   D'après 1., $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.
   De même, d'après 1., $Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$.
   Or $PQ = QP$ donc $(PQ)(u) = (QP)(u)$.
   On en déduit que $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
   On suppose que P est annulateur de u.
   Prouvons que PQ est annulateur de u.
   D'après 1. et 2.(a), $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$. (***)
   Or P est annulateur de u donc $P(u) = 0$ donc, d'après (***), $(PQ)(u) = 0$.
   On en déduit que PQ est annulateur de u.
3. Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A.
   $P_A(X) = \det(XI_2 - A)$. On trouve $P_A(X) = X(X-1)$.
   Soit $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$.
   On remarque que $R(0) = R(1) = 0$ et on en déduit que R est factorisable par $X(X-1)$.
   C'est-à-dire : $\exists Q \in \mathbb{K}[X]\ /\ R = X(X-1)Q$.
   Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(X) = X(X-1)$ annule A.
   Donc, d'après 2.b., comme $R = P_A(X)Q$, R est annulateur de A.

II Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 1 : Lemme de décomposition des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Plus généralement, si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors $\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$.

Démonstration

On a $(PQ)(u)(x) = P(u)\big(Q(u)(x)\big) = Q(u)\big(P(u)(x)\big)$. Donc si $P(u)(x) = 0$ ou $Q(u)(x) = 0$, alors $(PQ)(u)(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(Q(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de $\operatorname{Ker}((PQ)(u))$.

On a une relation de Bézout : $AP + BQ = 1$. Donc si $x \in \operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u))$, $x = A(u)\big(P(u)(x)\big) + B(u)\big(Q(u)(x)\big) = 0_E$ donc la somme est directe.

Puis tout $x \in \operatorname{Ker}((PQ)(u))$ s'écrit $x = y + z$ avec $y = A(u)\big(P(u)(x)\big)$ et $z = B(u)\big(Q(u)(x)\big)$, et alors $Q(u)(y) = (QAP)(u)(x) = A(u)\big((PQ)(u)(x)\big) = A(u)(0_E) = 0_E$ et $P(u)(z) = (PBQ)(u)(x) = B(u)\big((PQ)(u)(x)\big) = B(u)(0_E) = 0_E$ donc $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Reste à poser une récurrence, ce qui se fait sans trop de problème en remarquant que si $P_1, \dots, P_{n+1}$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $P_1 \cdots P_{n+1} = (P_1 \cdots P_n) P_{n+1}$ avec $(P_1 \cdots P_n) \wedge P_{n+1} = 1$. ∎

Exercice 3

Résoudre $y^{(4)} = y$, $E = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, u opérateur de dérivation.

On cherche donc $\operatorname{Ker}\big((X^4 - 1)(u)\big)$ avec $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)\big(X^2+1\big)$.
Les solutions sont les $x \mapsto Ae^{x} + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$ pour $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : CCINP 93

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. **Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.**
2. **(a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.**
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. **On suppose que u est non bijectif.**
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. On a $u^3 + u^2 + u = 0$ (*)
   Soit $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$.
   Alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$.
   Donc, d'après (*), $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=0} + y = 0$.
   Donc $y = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$. (1)
   De plus, E étant de dimension finie, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$. (2)
   Donc, d'après (1) et (2), $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

2. (a) Lemme des noyaux pour deux polynômes :
   Si A et B sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\operatorname{Ker}(AB)(u) = \operatorname{Ker} A(u) \oplus \operatorname{Ker} B(u)$.
   (b) On pose $P = X^3 + X^2 + X$. P est un polynôme annulateur de u donc $\operatorname{Ker} P(u) = E$.
   $P = X(X^2 + X + 1)$. De plus, X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
   Donc, d'après le lemme des noyaux, $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

   On en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u$. (3)
   Prouvons que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

   Soit $y \in \operatorname{Im} u$.

alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$.
$(u^2 + u + \mathrm{Id})(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$ d'après (*).
Donc $y \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$. (4)
Donc, d'après (3) et (4), $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

3. $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de u.
Donc si on note $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u alors $\mathrm{sp}(u) \subset \{$racines réelles de $P\}$.
Or $\{$racines réelles de $P\} = \{0\}$ donc $\mathrm{sp}(u) \subset \{0\}$. (5)
Or u est non bijectif donc, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u est non injectif.
Donc $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de u. (6)
On en déduit, d'après (5) et (6), que $\mathrm{sp}(u) = \{0\}$.

Corollaire 2 : Décomposition dans une base adaptée

(i) Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u.

(ii) Si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$ est un polynôme annulateur de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$, la matrice dans une base adaptée est diagonale par blocs.

Propriété 7 : Caractérisation 7 de diagonalisabilité

Si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.
(s'adapte aux matrices)

Démonstration

$\Longrightarrow$ Si u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\big((X - \lambda_i)(u)\big) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)(u)\right)$ d'après le lemme de décomposition des noyaux (les polynômes sont bien premiers entre eux deux à deux) donc $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur scindé simple de u.

Ou alors u est représenté par $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ (où chaque valeur propre λ_i apparaît m_{λ_i} fois) et alors $P(u)$ représenté par $\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} = 0_n$.

$\Longleftarrow$ Si $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur scindé simple de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\big((X - \lambda_i)(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$ et u est bien diagonalisable.

III Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Propriété 8 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Si u est diagonalisable, F stable par u et u_F l'endomorphisme induit, alors u_F est diagonalisable.

Démonstration

Tout polynôme annulateur de u est un polynôme annulateur de u_F. ■

On a déjà vu que les droites stables par u étaient exactement les droites engendrées par un vecteur propre.

Méthode 3 : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Le théorème suivant est hors-programme : il faut le redémontrer lorsqu'on en a besoin.

Théorème 2 : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
Un sous-espace non nul F de E est stable par u si et seulement s'il existe une base de F formée de vecteurs propres de u.

En effet, si on a une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F formée de vecteurs propres, les images de chacun des vecteurs sont encore dans F et F est bien stable par u.

Si, réciproquement, F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F. Comme u est diagonalisable, u_F l'est aussi et on a une base de F formée de vecteurs propres de u_F donc de u.

On peut donc déterminer des sous-espaces stables soit nuls, soit ayant une base construite à partir de vecteurs propres.

Exercice 5

Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On commence par diagonaliser A : $\operatorname{Sp} A = \{1, -3\}$, $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $E_{-3}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, donc u est bien diagonalisable.

Notons $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,-2)$ et $e_3 = (1,1,0)$ et classons les sous-espaces stables par dimensions :

- $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont comme toujours stables par u.
- Les droites stables par u sont les droites
  - ⋆ $D(\alpha, \beta) = \mathbb{R}(\alpha e_1 + \beta e_2)$ pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ contenues dans $E_1(A)$.
    Pour éviter les redondances, on peut par exemple considérer
    - $D(1,0) = \mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}(1,0,1)$ d'équations $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$
    - et les droites $D(\alpha, 1) = \mathbb{R}(\alpha, 1, \alpha - 2)$ d'équations $\begin{cases} x = \alpha y \\ z = (\alpha - 2) y \end{cases}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ $D' = \mathbb{R}(1,1,0) = E_{-3}(A)$ d'équations $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$
- Les plans stables par u sont des plans engendrés par des vecteurs propres : il s'agit donc
  - ⋆ $P_1 = E_1(A) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ d'équation $z = x - 2y$.
  - ⋆ $P(\alpha, \beta) = \operatorname{Vect}(\alpha e_1 + \beta e_2, e_3)$ pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
    De nouveau, on peut éviter les redondances en considérant
    - $P(1,0) = \operatorname{Vect}(e_1, e_3)$ d'équation $x = y + z$
    - pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha, 1) = \operatorname{Vect}(\alpha e_1 + e_2, e_3)$ d'équation $(\alpha - 2)(x - y) = (\alpha - 1)z$.

Méthode 4 : Résolution d'une équation matricielle

On trouve à l'oral des exercices du type : résoudre $P(X) = M$, où M est une matrice donnée, P un polynôme, X une matrice inconnue. Par exemple : Résoudre $X^2 + X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Il n'y a pas **une** méthode pour aborder ce problème, mais quand même... il est important de remarquer que si $P(X) = M$, alors X et M commutent. Et donc X laisse stables l'image, le noyau, les sous-espaces propres de M. Ce qui délimite pas mal les choses.

Comme toujours, il peut y avoir d'autres méthodes : les connaissances au programme sur les matrices nilpotentes permettent parfois de conclure très vite (exemple classique : résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Signalons enfin (voir plus tard) qu'une solution de l'équation $\exp(X) = M$ commute nécessairement avec M.

IV Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3 : de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Exemple

E5 – Si $n = 2$, $A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I_n$.

Démonstration : (Non exigible)

Soit $x \neq 0_E$. On veut montrer que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

1. On s'intéresse au plus petit sous-espaces vectoriel de E stable par u contenant x. Il contient nécessairement tous les $u^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Comme on est en dimension finie, on finit par avoir $u^k(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\right)$.
   Soit $d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ u^k(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\right)\right\}$.
   Alors $u^d(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)\right)$ et $\left(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)\right)$ est libre (sinon, l'un s'exprimerait comme combinaison linéaire des précédents ce qui contredit la minimalité de d).
   De plus, $F = \operatorname{Vect}\left(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)\right)$ est stable par u.
2. On cherche χ_{u_F}.
   En écrivant $u^d(x) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x)$, on a $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique s'obtient facilement avec une opération $L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{d} \lambda^k L_k$: $\chi_{u_F} = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \dots - a_1 X - a_0$ (cf TD, matrice compagnon).
   Alors $\chi_{u_F}(u_F)(x) = \chi_{u_F}(u)(x) = 0_E$. Or χ_{u_F} divise χ_u : $\chi_u = Q \times \chi_{u_F}$ donc $\chi_u(u)(x) = [Q(u)] \circ \left[\chi_{u_F}(u)\right](x) = [Q(u)](0_E) = 0_E$.
   Finalement, $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration : (Non exigible)

On peut aussi donner une démonstration utilisant la densité des matrices diagonalisables.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$. En considérant A à cœfficients complexes, elle est trigonalisable : on a $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Soit pour $k \in \mathbb{N}$, la matrice T_k obtenue en ajoutant $\frac{i}{2^k}$ au cœfficient diagonal de la ligne i de T et laissant les autres cœfficients inchangés.

Alors à partir d'un certain rang, les cœfficients diagonaux de T_k sont deux à deux distincts, donc T_k est diagonalisable, donc $A_k = PT_kP^{-1}$ l'est aussi.

Mais $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} T$ donc, par continuité de $B \mapsto PBP^{-1}$ (linéaire en dimension finie), $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$: l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Or le théorème de Cayley-Hamilton est facile pour une matrice diagonalisable : si $A = PDP^{-1}$, $\chi_A(A) = \chi_D(A) = P\chi_D(D)P^{-1} = 0$ car les cœfficients diagonaux de D sont justement les racines de $\chi_D = \chi_A$.

Soit pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, une suite $(A_k)_k$ de matrices diagonalisables tendant vers A.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_k}(A_k) = 0$.

En remarquant que $\chi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_B(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue car les cœfficients de χ_B sont polynomiaux en ceux de B et les fonctions $B \mapsto B^p$ sont continues car $(B_1,\dots,B_p) \mapsto B1 \times \cdots \times B_p$ est p-linéaire, on tire, en passant à la limite, $\chi_A(A) = 0$.

Remarquons qu'il n'y a pas de problème de corps car le polynôme caractéristique de A dans $\mathbb{K}$ est le même que celui dans $\mathbb{C}$. ■

V Polynôme minimal

On suppose E de dimension finie n.

Propriété 9 : Idéal annulateur

*L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$ appelé **idéal annulateur** de u (respectivement A).*

Démonstration

C'est le noyau du morphisme d'anneau $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$. ■

Définition 2 : Polynôme minimal

On appelle polynôme minimal de u (respectivement de A) l'unique générateur unitaire de cet idéal. On le notera π_u ou parfois μ_u (respectivement π_A ou parfois μ_A).

Remarque

- **R 7 –** Pas de notation officiel, on le note parfois μ_u ou μ_A.
- **R 8 –** La définition est licite car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.
- **R 9 –** $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} = (\pi_u) = \pi_u\mathbb{K}[X]$: π_u est donc le polynôme annulateur unitaire non nul de degré minimal.
- **R 10 –** $P(u) = 0$ si et seulement si π_u divise P.
- **R 11 –** Si $P(u) = 0$ et $\deg P < \deg \pi_u$, alors $P = 0$.

Propriété 10 : Invariant de similitude

Si A est une matrice représentant l'endomorphisme u, alors $\pi_u = \pi_A$.

Démonstration

u et A ont même idéal annulateur. ■

Propriété 11 : Base de $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$

Si $d = \deg \pi_u$ (respectivement $d = \deg \pi_A$), alors $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ (respectivement $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$).

Démonstration

Le caractère libre vient de la minimalité, le caractère générateur vient de la division euclidienne. ■

Propriété 12 : Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. En particulier, il est de degré au plus n.

Démonstration

Conséquence de Cayley-Hamilton ■

Propriété 13 : Racines du polynôme minimal

*Les racines du polynôme minimal sont **exactement** les valeurs propres.*

Démonstration

Comme π_u est un polynôme annulateur, on sait déjà que $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathcal{Z}(u)$.

Réciproquement, comme π_u divise χ_u d'après le théorème de Cayley-Hamilton, les racines de π_u sont bien des valeurs propres.

On peut aussi le voir sans : si λ racine de π_u, alors $\pi_u = (X-\lambda)Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $\pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)} = (u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ Q(u)$. Si λ n'était pas valeur propre, alors $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ serait un isomorphisme et $Q(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui contredit la minimalité. ■

Remarque

R 12 – Donc $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} (X-\lambda)$ divise π_u qui divise χ_u.

R 13 – χ_u et π_u ont les mêmes racines mais pas nécessairement les mêmes multiplicités.
Exemple : avec $\chi_{I_n} = (X-1)^n$ et $\pi_{I_n} = X - 1$.

R 14 – Si χ_u est scindé simple, alors $\pi_u = \chi_u$.
La réciproque est fausse : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2$ donc $\pi_A \in \{X, X^2\}$ et comme $A \neq 0_2$, $\pi_A = X^2 = \chi_A$.

Propriété 14 : Caractérisation 8 de la diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple si et seulement si $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} (X-\lambda)$.

(Idem avec les matrices)

Démonstration

On a déjà vu qu'être annulé par un polynôme scindé simple rendait diagonalisable.

Si, réciproquement, u est diagonalisable, alors le lemme des décomposition des noyaux avait permis de montrer que $P = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de u, est un polynôme annulateur de u. Donc il divise π_u. Or les λ_i sont les racines de π_u qui est unitaire, donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)$ qui est scindé simple. ■

Propriété 15 : Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Si F est stable par u, u_F l'endomorphisme induit, alors π_{u_F} divise π_u.

Démonstration

Comme $\pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\pi_u(u_F) = 0_{\mathscr{L}(F)}$ et donc $\pi_{u_F} | \pi_u$. ■

Propriété 16 : Caractérisations 2 et 3 de la trigonalisabilité

u est trigonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Démonstration

En effet, si u est trigonalisable, χ_u est scindé et c'est un polynôme annulateur d'après Cayley-Hamilton.

Si, réciproquement, P est un polynôme annulateur scindé, A matrice de u dans une base $\mathscr{B}$, π_A divise P donc a au moins une racine donc $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} u \neq \varnothing$.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, x vecteur propre associé que l'on complète en une base de E, ce qui permet de voir que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$.

Alors $P(A') = \begin{pmatrix} P(\lambda) & (*) \\ (0) & P(A_1) \end{pmatrix} = 0_n$ donc P annule A_1 et on termine par récurrence sur n comme dans la caractérisation avec le polynôme caractéristique scindé. ■

Méthode 5 : Déterminer le polynôme minimal

- Par définition, le polynôme minimal est le polynôme annulateur unitaire de degré minimal.
- Si on connaît un polynôme annulateur, le polynôme minimal est l'un de ses diviseur.
- Avec le polynôme caractéristique, c'est encore plus précis : celui-ci est un polynôme annulateur par le théorème de Cayley-Hamilton, mais on sait aussi que les racines du polynôme caractéristique sont exactement les mêmes que celles du polynôme minimal : les valeurs propres.
- Il suffit donc de déterminer l'ensemble des polynômes **divisant le polynôme caractéristique** et **ayant les mêmes racines** (mais des multiplicités inférieures ou égales) et de déterminer **celui de degré minimal** qui est un **polynôme annulateur**.

Exercice 6 : CCINP 91

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. **Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.**
2. **La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?**
3. **Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A. Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.**
4. **Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.**

1. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum\limits_{i=1}^{3} C_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3\end{aligned}$$

   Donc $\chi_A = (X-1)^3$.
   Donc A admet 1 comme unique valeur propre.
2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible.
   Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité. Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.
3. Notons π_A le polynôme minimal de A.

   π_A divise χ_A et π_A est un polynôme annulateur de A.
   $A - \mathrm{I}_3 \neq 0$ et $(A-\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Donc $\pi_A = (X-1)^2$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$, $\exists!(Q,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$, $X^n = (X-1)^2 Q + R \quad (1)$
   Or, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $R = aX + b$ donc $X^n = (X-1)^2 Q + aX + b$.

   Puisque 1 est racine double de $(X-1)^2$ on obtient : $1 = a + b$ et, après dérivation, $n = a$.
   Donc $R = nX + 1 - n$. $\quad (2)$
   $\pi_A = (X-1)^2$ étant un polynôme annulateur de A on a d'après (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = nA + (1-n)\mathrm{I}_3$$

Exercice 7 : CCINP 88

1. **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).**
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. **Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.**
   Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question 1.).

---

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
   On suppose que P annule u.
   Soit λ une valeur propre de u.
   Prouvons que $P(\lambda) = 0$.
   λ valeur propre de u donc : $\exists\, x \in E \backslash \{0\}$ / $u(x) = \lambda x$.
   On prouve alors par récurrence que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$.
   Ainsi : $P(u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = P(\lambda)\, x$.
   Or $P(u) = 0$ donc $P(u)(x) = 0$ donc $P(\lambda) x = 0$.

Or $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

(a) Posons $P = X^2 - 2X + 1$.
Prouvons que P est annulateur de u c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
Soit $M \in E$.
$u^2(M) = u \circ u(M) = (M + \mathrm{tr}(M)A) + \mathrm{tr}(M + \mathrm{tr}(M)A)\,A$.
C'est-à-dire, par linéarité de la trace, $u^2(M) = M + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A$.
Or $\mathrm{tr}(A) = 0$ donc $u^2(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A$.
Ainsi $u^2(M) - 2u(M) + \mathrm{Id}(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A - 2M - 2\mathrm{tr}(M)A + M = 0$.
On a donc prouvé que $u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$.

C'est-à-dire P est annulateur de u.

(b) Notons I_n la matrice unité de E.
Première méthode :
Notons $\mathrm{Spec}(u)$ le spectre de u.
$P = (X-1)^2$ et P est annulateur de u.
Donc d'après 1., $\mathrm{Spec}(u) \subset \{1\}$.
De plus $A \neq 0$ et $u(A) = A$ donc $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.
Ainsi, si u était diagonalisable alors on aurait $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$.
C'est-à-dire, on aurait $u = \mathrm{Id}$.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.
Deuxième méthode :

Notons P_m le polynôme minimal de u.
$P = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de u donc $P_m | P$.
Si u était diagonalisable alors P_m serait scindé à racines simples.
On aurait donc $P_m = X - 1$.
Ce qui impliquerait que $u = \mathrm{Id}$ car P_m est également un polynôme annulateur de u.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

VI Sous-espaces caractéristiques

Définition 3 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et les m_k (leurs multiplicités) sont dans $\mathbb{N}^*$.
On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous-espaces

$$F_k(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$$

pour $k \in [\![1, p]\!]$.

Remarque

R 15 – À ne pas confondre avec les sous-espaces propres $E_k(u) = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \mathrm{id}_E\right)$!

Propriété 17 : des sous-espaces caractéristiques

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(*i*) *Chaque* $F_k(u)$ *est stable par* u.

(*ii*) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k(u)$.

(*iii*) $\forall\, k \in [\![1,p]\!],\quad E_k(u) \subset F_k(u)$.

(*iv*) $\forall\, k \in [\![1,p]\!],\quad \dim F_k(u) = m_k$.

Démonstration

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(i) Vient du fait que u et le polynôme en u : $(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}$ commutent.

(ii) Découle du lemme de décomposition des noyaux et du théorème de Cayley-Hamilton.

(iii) Pour tout endomorphisme v et tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} v^n$.

(iv) Pour alléger la rédaction, on note F_k pour $F_k(u)$. Soit $d_k = \dim F_k$, u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k.

La matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ est diagonale par blocs avec, sur chaque bloc diagonale, une matrice représentant u_k.
Or, par définition de F_k, $(u_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k})^{m_k} = 0_{F_k}$. L'endomorphisme $n_k = u_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ de F_k est donc nilpotent et $u_k = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$.
On peut donc choisir une base de F_k dans laquelle n_k est représenté par une matricielle triangulaire supérieure stricte.
Alors la matrice de u dans la base adaptée est diagonale par blocs avec, sur chaque bloc diagonal, une matrice de la forme $T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d_k}(\mathbb{K})$, ce qui donne $\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$.
Un autre argument pour trouver ce polynôme caractéristique est le suivant : $E_k \subset F_k$ et le lemme de décomposition des noyaux donne, si $k \neq \ell$, $F_k \cap F_\ell = \{0\}$. On en déduit que λ_k est la seule valeur propre possible de l'endomorphisme u_k.
Mais χ_{u_k} divise χ_u qui est scindé, donc χ_{u_k} est scindé également, unitaire, de degré d_k. Donc $\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$.
On obtient alors

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{d_k} = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

et donc pour k, $d_k = m_k$ (unicité de la multiplicité). ■

Théorème 4 : Réduction par blocs

Si χ_u *est scindé, il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* u *est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux.*

Si χ_A *est scindé,* A *est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux.*

Démonstration

Démontré dans la propriété précédente. ■

Corollaire 3 : Décomposition de Dunford (HP)

Si u *est trigonalisable, on peut trouver* d *diagonalisable et* n *nilpotent tels que* $u = d + n$ *et* $nd = dn$.

Démonstration

Il suffit de choisir n et d tels que, avec les notations précédentes, les F_k soient stables par n et par d, pour tout k, $n_k = u_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ et $d_k = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$.

Alors d diagonalisable (dans une base adaptée à la supplémentarité des F_k, sa matrice est diagonale), et n nilpotent, car $n^{\max m_k} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. ■

Remarque

R 16 – On peut même montrer que d et n sont uniques et sont des polynômes en u.
On parle de **décomposition de Dunford** (voir TD).

R 17 – C'est très intéressant pour calculer les puissances de u.