Dénombrabilité, familles sommables

Vrai ou faux

1. Toute partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est finie.
2. $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable.
3. $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ n'est pas dénombrable.
4. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum z_n$ est absolument convergente.
5. Si une série converge, toute série obtenue en permutant ses termes converge.

1. Dénombrabilité

1 Montrer que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ (suites presque nulles, donc nulle à partir d'un certain rang) est dénombrable mais pas $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

2 L'ensemble des nombres complexes de module 1 est-il dénombrable ?

L'ensemble des racines de l'unité (i.e. l'ensemble des z dans $\mathbb{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $z^n = 1$) l'est-il ?

Solution de 2 :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 distincts de -1 est en bijection avec $]-\pi, \pi[$, donc avec $\mathbb{R}$, donc n'est pas dénombrable. L'ensemble des racines de l'unité, réunion dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable, et n'est pas fini, donc est dénombrable.

3 On dit qu'un nombre complexe est algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Il y a donc beaucoup de nombres transcendants.

Indication : on pourra commencer par s'intéresser à des polynômes « pas trop gros ».

Solution de 3 :

Soit $A_{n,p}$ l'ensemble des racines des polynômes non nuls de degré $\leqslant n$ dont les coefficients sont des entiers compris entre $-p$ et p. $A_{n,p}$ est fini (on a un nombre fini de polynômes, chacun ayant un nombre fini de racines). Or l'ensemble des nombres complexes algébriques est

$$\bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} A_{n,p}$$

et donc, réunion dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable. Comme il n'est pas fini du tout...

4 Montrer que l'ensemble des extractrices n'est pas dénombrable.

Peut-on dire que l'ensemble des suites extraites d'une suite donnée n'est jamais dénombrable ?

Solution de 4 :

Argument diagonal de Cantor.

Sinon, on numérote $\phi_1, \phi_2, \ldots$ les extractrices.

Et on pose ψ strictement croissante telle que pour tout n, $\psi(n) \neq \phi_n(n)$ qui est distincte de toutes les autres.

2. Familles sommables

5 Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ le sont et, lorsque c'est le cas, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

Solution de 5 :

En effet, si la famille est sommable, alors les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=1}^{n} u_{-k}$ sont majorées et comme les séries sontà termes positifs, elles convergent. De plus $\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} u_{-k} = \sum_{k=-n}^{n} u_k \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

Réciproquement, si les deux séries sont convergentes, alors pour tout I ensemble fini, il existe n tel que $I \subset [\![-n, n]\!]$ et donc $\sum_{n\in I} u_n$ est majoré par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ donc la famille est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

6 Montrer que la famille $\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et, en utilisant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculer les sommes

1. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2 n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ m|n}} \frac{1}{m^2 n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ m\wedge n=1}} \frac{1}{m^2 n^2}$

7 Pour quelles valeurs des nombres complexes a et b la famille $\left(a^m b^n\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Calculer alors sa somme.

8 En utilisant la famille $\left(x^{n+p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, montrer que, si $|x| < 1$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Résultat qui s'obtient plus naturellement par utilisation des séries entières.

9 Les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{Z}$? Si oui, calculer leur somme.

1. $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ 2. $\left(\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ 3. $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{2^{|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ 4. $\left(2^{n-2|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

10 Démontrer que, si x est élément de $[0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

Solution de 10 :

Comme $x\in[0,1[$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $x^n\in[0,1[$, ce qui autorise l'écriture

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}\right)$$

On pose alors, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}_*\times\mathbb{N}$,

$$u_{n,p}=(-1)^p x^{n(p+1)}$$

et on montre la sommabilité de cette famille (en n'oubliant pas les valeurs absolues!), ce qui permet d'intervertir et d'obtenir le résultat.

11 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$.

1. (a) Écrire $\sum u_n$ comme le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.
2. Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}$, on note $a_{n,k}$ le réel valant $\frac{4^k}{2^n k!}$ si $k\leqslant n$ et 0 sinon.

   À l'aide du théorème de Fubini, montrer que $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et retrouver $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

12 **Mines**

Discuter, suivant les valeurs du réel α, la sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ puis celle de $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$

Solution de 12 : Mines

Pour la première, l'introduction de la partition définie par les

$$J_p=\{(m,n)\ ;\ m+n=p\}$$

est judicieuse, et mène assez rapidement au résultat : la famille est sommable si et seulement si $\alpha>2$. Pour la deuxième, la même idée (considérer les

$$I_p=\{(m,n)\ ;\ m^2+n^2=p\}$$

n'est pas efficace (quand $I_p\neq\varnothing$, on ne sait pas trop bien évaluer son cardinal, ce n'est pas qu'il n'y ait pas de résultats mais ils ne sont pas facilement à notre portée). On reprend donc les démarches classiques : pour tout $m \geqslant 1$, $\sum_n \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ (comparaison à une série de Riemann). Supposons dorénavant que ce soit le cas. On peut encadrer alors

$$s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$$

par deux intégrales, on en déduit que $\sum s_m$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On rappelle la définition de la fonction ζ, classique mais hors programme $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

13 Mines

Démontrer que les deux séries $\sum_{k\geqslant 2}\left(\zeta(k)-1\right)$ et $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\left(\zeta(k)-1\right)$ convergent, et calculer leurs sommes.

Solution de 13 : Mines

Remarquer que $\zeta(k)-1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ et utiliser Fubini.

14

Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$, on définit $J_p = \{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ mn = p\}$.

Utiliser la famille (J_p) pour démontrer $\left(\zeta(s)\right)^2 = \sum_{p\geqslant 1} \frac{n_p}{p^s}$ où s est un réel strictement supérieur à 1, n_p désignant pour tout p le nombre de diviseurs de p.

Solution de 14 :

On considère la famille

$$\left(\frac{1}{m^s n^s}\right)$$

qui est, si $s > 1$, facilement sommable, de somme $\zeta(s)^2$ (c'est une « famille produit »). Mais d'autre part, $\{J_p\ ;\ p \geqslant 1\}$ forme une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$, qu'on peut utiliser pour sommer la famille. Le résultat se trouve alors sans difficulté à condition de noter que n_p est le cardinal de J_p.

15

Soit $s \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm}3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
2. On suppose $s > 1$. Montrer que $S < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.
3. On suppose $s \geqslant 1$. Montrer que $S > \sum_{k=1}^{5-1} \frac{1}{k^s}$.
4. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
5. On suppose $s > 1$. Montrer que $S_3 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.
6. On suppose $s \geqslant 1$. Montrer que $S_3 > \sum_{k=1}^{7-1} \frac{1}{k^s}$.

7. Pour $s>1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
8. Pour $s=1$, étendre les résultats précédents et montrer que $\displaystyle\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p}=+\infty$.

Solution de 15 :

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm}3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
   Définissons, si $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,
   $$u_{m,n}=2^{-sm}3^{-sn}$$
   La famille $\left(u_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est à termes réels positifs. On peut lui appliquer le critère de sommabilité des familles produits (voir plus haut), mais il n'est pas explicitement au programme, et de toute façon est suffisamment simple pour qu'on le retrouve à chaque fois. On dira donc, par exemple :
   • Pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_n u_{m,n}$ converge (car $0\leqslant 3^{-s}<1$), et
   $$\sigma_m=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{m,n}=2^{-sm}\frac{1}{1-3^{-s}}$$
   • $\displaystyle\sum_m \sigma_m$ converge, et
   $$\sum_{m=0}^{+\infty}\sigma_m=\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}$$
   On a donc la sommabilité, et la somme
   $$S=\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}$$
2. On suppose $s>1$. Montrer que
   $$S<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$$
   L'application $\phi\ :\ \mathbb{N}^2\longrightarrow\mathbb{N}_*$ définie par $\phi(m,n)=2^m\times 3^n$ est injective (arithmétique...). Notons $\phi(\mathbb{N}^2)=I$ (I est l'ensemble constitué des entiers naturels non nuls qui ne sont divisibles par aucun nombre premier >3). Alors
   $$S=\sum_{k\in I}\frac{1}{k^s}$$
   (c'est une conséquence de la commutativité de la sommabilité). On en déduit, comme $I\subset\mathbb{N}^*$, le résultat.
3. On suppose $s\geqslant 1$. Montrer que
   $$S>\sum_{k=1}^{5-1}\frac{1}{k^s}$$
   Ici, en reprenant les notations précédentes, il suffit de remarquer que $[\![1,5-1]\!]\subset I$.

4. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
On considère par exemple, pour $p\in\mathbb{N}$,
$$I_p=\{(n_1,n_2,p)\ ;\ (n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\}$$
Il est assez clair que $\displaystyle\bigcup_{p=0}^{+\infty} I_p=\mathbb{N}^3$ et que les I_p sont deux à deux disjoints. Or, pour tout p, d'après **1.**, la famille $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in I_p}$ est sommable, de somme
$$\sigma_p=5^{-sp}\times\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}$$
Or $\sum_p\sigma_p$ converge (car $5^{-s}\in[0,1[$), donc par théorème de sommabilité et sommation par paquets, la « suite triple » est sommable, de somme
$$S_3=\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}\times\frac{1}{1-5^{-s}}$$
5. On suppose $s>1$. Montrer que
$$S_3<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$$
6. On suppose $s\geqslant 1$. Montrer que
$$S_3>\sum_{k=1}^{7-1}\frac{1}{k^s}$$
Même raisonnement que plus haut, en considérant cette fois
$$\phi_3:\ \mathbb{N}^3\mapsto\mathbb{N}_*(n_1,n_2,n_3)2^{n_1}3^{n_2}5^{n_3}$$
qui est injective, et en notant I_3 son image, qui est une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant $[\![1,7-1]\!]$ puisque I_3 est l'ensemble des naturels non nuls qui ne sont divisibles par aucun nombre premier >5.
7. Pour $s>1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule
$$\prod_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$
où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
On écrit $\mathscr{P}=\{p_k\ ;\ k\in\mathbb{N}_*\}$ avec $p_k<p_{k+1}$ (autrement dit on numérote l'ensemble des nombres premiers par ordre strictement croissant). Une récurrence sur N montre (même preuve de l'hérédité que le passage de 2 à 3, avec seulement des notations un peu plus pénibles) que la famille
$$\left(2^{-sn_1}\times3^{-sn_2}\times\cdots\times p_N^{-sn_N}\right)_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{N}^N}$$
est sommable, et que sa somme vaut
$$S_N=\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-p_k^{-s}}$$
Et on a de plus
$$\sum_{k=1}^{p_{N+1}-1}\frac{1}{k^s}\leqslant S_N\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$$
ce qui, par théorème d'encadrement, montre la formule demandée.

8. Pour $s=1$, étendre les résultats précédents et montrer que

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p}=+\infty$$

On a encore le droit d'écrire (les familles considérées ci-dessus sont sommables pour tout $s>0$, pas seulement pour $s>1$, car ce sont des familles produits de termes généraux de séries géométriques de raisons dans $[0,1[$)

$$\sum_{k=1}^{p_{N+1}-1}\frac{1}{k}\leqslant\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-p_k^{-1}}$$

Par divergence de la série harmonique,

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-p_k^{-1}}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$$

Appliquant le logarithme, la série $\sum_k \ln(1-1/p_k)$ diverge. Et $\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\sim_{k\to+\infty}-\frac{1}{p_k}$, ce qui donne bien la divergence de $\sum_k\frac{1}{p_k}$.