DTL 5

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE

- **Deux sujets au choix : type CCINP ou (exclusif) type CENTRALE.**
Choisissez dès le départ un sujet, et ne changez pas d'avis.

💪

- VOUS ÊTES AU CONCOURS. DONNEZ TOUT !

SUJET CCINP

Exercice I

On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad x^2y''+(x^2-x)y'+2y=0$.
Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ $(r>0)$ de $\mathbb{R}$?

Exercice II

Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice III

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Problème

Partie préliminaire

1. **a)** Soit $x\in]0,+\infty[$; démontrer que la fonction $t\longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   b) On note alors, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).
   Démontrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\Gamma(x)>0$.
   c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.
2. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée constante d'Euler).
Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

3. Pour $x\in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n\geqslant1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :
$$\text{pour tout } t\in]0,n],\ f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t\in]n,+\infty[,\ f_n(t)=0.$$
   a) Démontrer que, pour tout $x<1$, $\ln(1-x)\leqslant -x$. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant1$, pour tout $x\in]0,+\infty[$ et tout $t\in]0,+\infty[$, $0\leqslant f_n(t)\leqslant e^{-t}t^{x-1}$.
   b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x\in]0,+\infty[$:
$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$
4. On pose, pour n entier naturel et pour $x\in]0,+\infty[$, $I_n(x)=\displaystyle\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$.
   a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x>0$ et pour $n\geqslant1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.
   b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x\in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.
   c) Démontrer que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\Gamma(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$ (formule de Gauss).
5. Pour tout entier $n\geqslant1$, on note toujours $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$.
En remarquant que, pour $n\geqslant1$ et $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right]$, démontrer que, pour tout $x\in]0,+\infty[$: $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right]$ (formule de Weierstrass).
6. **a)** En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
   b) On pose, pour tout $x\in]0,+\infty[$: $g(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.
   c) En déduire que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\psi(x)=\dfrac{-1}{x}-\gamma+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.
7. **a)** Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Calculer, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$, puis démontrer que, pour tout entier $n\geqslant2$,
$$\psi(n)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$
   c) On pose, pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y)=\dfrac{1}{k+y+1}-\dfrac{1}{k+y+x}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant0}j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\psi(x+n)-\psi(1+n)$.
8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :
   - $f(1)=-\gamma$,
   - pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x+1)=f(x)+\dfrac{1}{x}$,
   - pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(x+n)-f(1+n))=0$.

Mathématiques 2

MP

2015

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Autour des sommes d'Euler

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

I Représentation intégrale de sommes de séries

I.A –

I.A.1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

I.A.2) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$. En déduire que $H_n \sim \ln n$.

I.B – Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I.C –

I.C.1) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

I.C.2) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

I.D – Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t$$

I.D.1) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

I.D.2) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0,1[$, $\quad I_{p,q}^{\varepsilon} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$.

I.D.3) En déduire que l'on a $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

I.D.4) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

I.E – Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

On suppose que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$.

I.F –

I.F.1) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} \,\mathrm{d}t$$

I.F.2) Établir que l'on a alors $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t} \,\mathrm{d}t$.

I.F.3) En déduire que $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} \,\mathrm{d}t$

puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II La fonction β

II.A – La fonction Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} \,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

II.B – La fonction β et son équation fonctionnelle

Pour (x,y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \,\mathrm{d}t$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y} \beta(x,y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$, $y > 0$, $\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x,y)$.

II.C – Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\quad \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question on suppose $x > 1$ et $y > 1$.

II.C.2) Montrer que $\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \,\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$.

II.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y)$$

II.C.4) Soit $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) \,\mathrm{d}u$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

II.C.5) Montrer que $\lim_{a \to +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

II.C.6) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}

II.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

III La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.A – Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B – Sens de variation de ψ

III.B.1) À partir de la relation ($\mathcal{R}$), justifier que $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)$.

III.B.2) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$?

III.B.3) Montrer que la fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.C – Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III.C.1) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

III.C.2) Soit n un entier $\geqslant 2$ et x un réel > -1. On pose $p = E(x) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Prouver que

$$0 \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant H_{n+p} - H_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}$$

III.C.3) En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

III.D – Un développement en série entière

On note g la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

III.D.1) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$.

Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

III.D.2) Montrer que pour tout entier n et pour tout x dans $]-1, 1[$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \zeta(2) |x|^{n+1}$$

Montrer que g est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

III.D.3) Prouver que pour tout x dans $]-1, 1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

IV Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $B(x) = \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1)$.

IV.A – Une relation entre B et ψ

Justifier que B est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

À l'aide de la relation trouvée au III.B.1 établir que pour tout réel $x > 0$

$$xB(x) = \big(\psi(1+x) - \psi(1)\big)^2 + \big(\psi'(1) - \psi'(1+x)\big)$$

En déduire que B est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.B – Expression de S_r à l'aide de la fonction B

IV.B.1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

IV.B.2) Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$.

IV.B.3) En déduire que pour tout entier $r \geqslant 2$, $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim\limits_{x \to 0^+} B^{(r-2)}(x)$.

IV.B.4) Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au I.F.3.

IV.C – Soit φ la fonction définie $]-1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \big(\psi(1+x) - \psi(1)\big)^2 + \big(\psi'(1) - \psi'(1+x)\big)$.

IV.C.1) Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

IV.C.2) Conclure que, pour tout entier $r \geqslant 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)$$

• • • FIN • • •