# I Représentation intégrale de sommes de séries

I.A.1) $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est un $\boxed{\text{terme général de série convergente}}$ par comparaison à un terme général positif de série de Riemann convergente car $2 > 1$.

*Remarque : question étrangement posée car correspondant à un résultat du cours conséquence d'une comparaison série-intégrale maintenant hors-programme.*

I.A.2) Notons $\ell = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$. Comme pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1)$, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n + \ln 1 = H_n - 1 - \ln n = \ell + \mathrm{o}(1),$$

donc $\boxed{H_n = \ln n + \ell + 1 + \mathrm{o}(1)}$ et $\dfrac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ : $\boxed{H_n \sim \ln n.}$

**I.B** - On a alors $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} \sim \dfrac{\ln n}{n^r} \geqslant 0$, série classique de Bertrand.

Si $r > 1$ et $1 < \alpha < r$, alors $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ par croissances comparées, donc par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ converge.

Si $r \leqslant 1$ et $n \geqslant 2$, $\dfrac{\ln n}{n^r} \geqslant \dfrac{1}{n^r} \geqslant 0$ donc par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ diverge.

Finalement, $\boxed{\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r} \text{ converge si et seulement si } r > 1.}$

I.C.1) Voir cours.

I.C.2) Par produit (de Cauchy), $t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ (au moins, mais comme la fonction n'est pas définie en $1$, on ne peut de toute façon pas faire mieux), et pour tout $t \in ]-1,1[$, $-\dfrac{\ln(1-t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ avec $a_k = \dfrac{1}{k}$ si $k \neq 0$ (vu le DSE de $t \mapsto -\ln(1-t)$) et $0$ sinon et $b_k = 1$ (vu le DSE de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$), donc $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = H_n$ (avec $c_0 = 0$), donc $\boxed{-\dfrac{\ln(1-t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.}$

I.D.1) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $t \mapsto t^p \ln^q t$ est continue sur $]0,1]$, et $\left|t^p \ln^q t\right| \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées, donc par comparaison de fonctions positives et par critère de Riemann $(1/2 < 1)$, $t \mapsto t^p \ln^q t$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\boxed{I_{p,q} \text{ existe bien.}}$

I.D.2) On intègre par parties, $t \mapsto \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto \ln^q t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et on obtient la formule demandée.

I.D.3) On fait tendre $\varepsilon$ vers $0$, par croissances comparées on obtient $\varepsilon^{p+1} \ln^q \varepsilon \to 0$ et par définition d'une intégrale généralisée et unicité de la limite, on obtient la formule demandée.

I.D.4) On a alors par récurrence $I_{p,q}=(-1)^q\dfrac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+1)}I_{p,0}=\dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}\left[\dfrac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$ donc $\boxed{I_{p,q}=\dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}}$ (cohérent pour $q=0$).

**I.E** - On utilise un théorème d'inversion série-intégrale (intégration terme à terme) par convergence $N_1$. Soit $r\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\in ]0,1[\mapsto a_n t^n \ln^{r-1} t$.

**H1** Par définition de $f$, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $f : t\mapsto \ln^{r-1} t f(t)$ (dont le programme ne demande pas de préciser qu'elle est continue par morceaux sur $]0,1[$, une fonction développable en série entière étant de classe $\mathscr{C}^\infty$.)

**H2** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est intégrable sur $]0,1[$ vu la question I.D.1. (avec $n, r-1\in\mathbb{N}$).

**H3** $\displaystyle\int_0^1 \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t=|a_n|\int_0^1 t^n|\ln t|^{r-1}\,\mathrm{d}t=(-1)^{r-1}|a_n|\,I_{n,r-1}=(r-1)!\frac{|a_n|}{(n+1)^r}$ d'après I.D.4.

Donc, vu l'hypothèse d'absolue convergence, $\displaystyle\sum\int_0^1\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t$ converge.

On peut donc intervertir série et intégrale sans problème de convergence, et obtenir

$$\int_0^1 \ln^{r-1} t\, f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 a_n t^n \ln^{r-1} t\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n I_{n,r-1}$$

donc $\displaystyle\boxed{\int_0^1 \ln^{r-1} t\, f(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)^r}.}$

I.F.1) On applique la question précédente à $f : t\mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ DSE sur $]-1,1[$ de suite de cœfficients $(H_n)_n$ d'après I.C (quitte à poser $H_0=0$), avec $r\geqslant 2$ pour avoir la convergence (absolue mais tout est positif ici) de $\sum\dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ d'après I.B et le résultat de la question précédente multiplié par $\dfrac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}$ nous donne directement la formule attendue.

I.F.2) On effectue une intégration par parties dans l'intégrale de droite, avec $t\mapsto\ln^{r-1} t$ et $t\mapsto(\ln(1-t))^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, avec $0<\varepsilon<a<1$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a \ln^{r-1} t\,\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t&=\left[-\ln^{r-1} t\,\frac{(\ln(1-t))^2}{2}\right]_\varepsilon^a+\frac{r-1}{2}\int_\varepsilon^a\frac{\ln^{r-2} t}{t}(\ln(1-t))^2\,\mathrm{d}t\\&=\ln^{r-1}\varepsilon\,\frac{(\ln(1-\varepsilon))^2}{2}-\ln^{r-1} a\,\frac{(\ln(1-a))^2}{2}+\frac{r-1}{2}\int_\varepsilon^a\frac{\ln^{r-2} t}{t}(\ln(1-t))^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

avec $\ln^{r-1}\varepsilon\,\dfrac{(\ln(1-\varepsilon))^2}{2}\sim\dfrac{\varepsilon^2\ln^{r-1}\varepsilon}{2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$ par croissances comparées et, avec $a=1-h$,

$$\ln^{r-1} a\,\frac{(\ln(1-a))^2}{2}=\ln^{r-1}(1-h)\frac{\ln^2 h}{2}\sim\frac{(-1)^{r-1}h^{r-1}\ln^2 h}{2}\xrightarrow[a\to 1]{}0$$

car $r-1>0$, toujours par croissances comparées.

Ainsi, $\ln^{r-1}\varepsilon\,\dfrac{(\ln(1-\varepsilon))^2}{2}-\ln^{r-1} a\,\dfrac{(\ln(1-a))^2}{2}\xrightarrow[(a,\varepsilon)\to(1,0)]{}0$, $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln^{r-2} t}{t}(\ln(1-t))^2\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{S_r=\frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\int_0^1\frac{\ln^{r-2} t}{t}(\ln(1-t))^2\,\mathrm{d}t.}$$

I.F.3) Directement, $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln^2(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$, puis, avec le changement de variable $x = 1-t$ ($\mathscr{C}^1$ et bijectif), $S_2 = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^0 \dfrac{\ln^2 x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ donc $\boxed{S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln^2 t}{1-t}\,\mathrm{d}t.}$

Cela nous incite à utiliser de nouveau la question I.E avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ sur $]-1,1[$ tel que $\sum \dfrac{1}{(n+1)^3}$ converge absolument car à terme positif et par critère de Riemann, ce qui nous donne directement

$$\int_0^1 \ln t \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = (-1)^2 2! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$$

soit encore $\boxed{S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3} = \zeta(3).}$

L'intégration terme à terme se justifie aussi par le fait que l'ait affaire à une série simplement convergente de fonctions à valeurs positives.

## II La fonction $\beta$

II.A.1) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est définie, positive et continue sur $]0,+\infty[$.
$\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann avec $1-x<1$).
Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ . $(*)$
De plus, $t^2 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc, pour $t$ au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).
Donc $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. $(**)$
Donc, d'après $(*)$ et $(**)$, $\boxed{t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[.}$

---

II.A.2) Soit $x > 0$ et $\alpha > 0$. Par changement de variable $u = \alpha t$ de classe $\mathscr{C}^1$ bijectif de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{u}{\alpha}\right)^{x-1} \mathrm{e}^{-u} \dfrac{\mathrm{d}u}{\alpha}$ ont même nature, donc $\boxed{\text{convergent}}$ par la question précédente, et sont égales : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\Gamma(x)}{\alpha^x}.}$

---

II.B.1) Soit $x > 0$ et $y > 0$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est définie, positive et continue sur $]0,1[$.
$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ (fonction de Riemann avec $1-x<1$).
Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $(*)$ $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.
De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ (fonction de Riemann avec $1-y<1$).
Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $(**)$ $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ .
D'après $(*)$ et $(**)$, $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$, donc $\boxed{\beta(x,y) \text{ est bien défini.}}$

---

II.B.2) Le changement de variable, licite, $u = 1-t$ donne directement $\boxed{\beta(x,y) = \beta(y,x).}$

II.B.3) Soient $x>0$ et $y>0$. On cherche à démontrer que $x\big(\beta(x,y)-\beta(x+1,y)\big)=y\beta(x+1,y)$. Or

$$x\big(\beta(x,y)-\beta(x+1,y)\big)=x\int_0^1(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x\,t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t$$

Soit $0<a<b<1$. Comme $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto(1-t)^y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, par intégration par parties,

$$\int_a^b x\,t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t=\big[t^x(1-t)^{y-1}\big]_a^b+y\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

avec $\big[t^x(1-t)^{y-1}\big]_a^b=\mathrm{e}^{x\ln b+(y-1)\ln(1-b)}-\mathrm{e}^{x\ln a+(y-1)\ln(1-a)}$ qui tend vers $0$ lorsque $a\to0$ et $b\to1$ donc

$$x\big(\beta(x,y)-\beta(x+1,y)\big)=y\beta(x+1,y)$$

et $\boxed{\beta(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}\beta(x,y).}$

Autre rédaction possible (calcul dans l'autre sens) : on part de $\beta(x+1,y)=\displaystyle\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ et on intègre par partie (en se plaçant sur un segment) en dérivant $t^x$ et primitivant $(1-t)^{y-1}$. On obtient alors

$$\beta(x+1,y)=\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t=\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{y}\big(\beta(x,y)-\beta(x+1,y)\big)$$

ce qui redonne bien le résultat attendu.

II.B.4) Soient $x>0$ et $y>0$. en utilisant la question précédente et la symétrie vu en question II.B.2,

$$\beta(x+1,y+1)=\frac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1)=\frac{x}{x+y+1}\beta(y+1,x)=\frac{x}{x+y+1}\,\frac{y}{y+x}\beta(y,x)$$

donc $\boxed{\beta(x+1,y+1)=\dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y).}$

II.C.1) Soit $\gamma:(x,y)\in\big(\mathbb{R}_*^+\big)^2\mapsto\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, bien définie d'après ce qui a été admis sur la fonction $\Gamma$.

Alors, pour tout $x>0$ et $y>0$, $\gamma(x+1,y+1)=\dfrac{xy\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$ d'après la relation admise sur $\Gamma$, donc $\gamma$ vérifie la même relation que celle montrée pour $\beta$ à la question précédente.

Ainsi, pour tout $x>0$ et $y>0$, $\beta(x,y)=\gamma(x,y)$ si et seulement si $\beta(x+1,y+1)=\gamma(x+1,y+1)$.

Comme $x+1>1$ et $y+1>1$, $\boxed{\text{il suffit donc de le vérifier pour tout } x>1 \text{ et } y>1.}$

II.C.2) $u\mapsto\dfrac{u}{1+u}=1-\dfrac{1}{1+u}$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$ (de réciproque $t\mapsto\dfrac{t}{1-t}$) donc, par changement de variable, $\boxed{\beta(x,y)=}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}=\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u}$ qui est donc bien convergente.

II.C.3) Par continuité et théorème fondamental de l'analyse, $F_{x,y}$ existe bien.

Comme pour tout $u>0$, $\mathrm{e}^{-u}u^{x+y-1}>0$, $F_{x,y}:t\mapsto\displaystyle\int_0^t\mathrm{e}^{-u}u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u$ est croissante, donc majorée par sa limite en $+\infty$ qui est $\Gamma(x+y)$ : $\boxed{\forall t\in\mathbb{R}^+,\quad F_{x,y}(t)\leqslant\Gamma(x+y).}$

II.C.4) On applique le théorème de continuité sous le signe intégrale, à $x$ et $y$ fixés.

Soit $g:(a,u)\in\mathbb{R}^+\times]0,+\infty[\mapsto\dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}((1+u)a)$.

**H1** Pour tout $u \in ]0,+\infty[$, $a \mapsto g(a,u)$ est continue par opération (et car $F_{x,y}$ l'est).

**H2 Domination** Pour tout $(u,a) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}^+$, $\left|g(a,u)\right| \leqslant \phi(u) = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$ d'après la question précédente, avec $\phi$ indépendante de $u$ ($x, y$ sont fixés), continue (par morceaux), positive, intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après II.C.2.

(Le programme ne demande pas de préciser que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $u \mapsto g(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ par opérations (et car $F_{x,y}$ l'est).)

On en déduit que $\boxed{G \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}^+.}$

---

II.C.5) On applique le théorème de convergence dominée, toujours à $x$ et $y$ fixés.

**H1** Pour tout $u \in ]0,+\infty[$, $g(a,u) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y) = \phi(u)$.

(Le programme ne demande pas de préciser que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $u \mapsto g(a,u)$ est toujours continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ et $\phi$ continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.)

**H2 Domination** Exactement la même que dans la question précédente.

On en déduit que $\boxed{G(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \Gamma(x+y)\beta(x,y)}$ car $F_{x,y}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Gamma(x+y)$.

---

II.C.6) Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_*^+$. On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ sous le signe intégrale, toujours à $x, y$ fixés.

**H1** Pour tout $u \in ]0,+\infty[$, $a \mapsto g(a,u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[c,d]$ par opérations (principalement parce que $F_{x,y}$ l'est), et

$$\frac{\partial g}{\partial a} : (a,u) \mapsto (1+u)\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \mathrm{e}^{-(1+u)a}((1+u)a)^{x+y-1} = u^{x-1}\mathrm{e}^{-(1+u)a}a^{x+y-1}$$

(Le programme ne demande pas de préciser que pour tout $a \in [c,d]$, $u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ par opérations.)

**H2** Pour tout $a \in [c,d]$, $u \mapsto g(a,u)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ comme déjà vu en II.C.4.

**H3 Domination** Pour tout $(a,x) \in [c,d]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)\right| \leqslant \psi(u) = u^{x-1}\mathrm{e}^{-(1+u)c}d^{x+y-1}$ car $1+u>0$ et $x+y-1>0$.

$\psi$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, intégrable sur $]0,1]$ car prolongeable par continuité et sur $[1,+\infty[$ car $\psi(u) = \underset{u\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ par croissances comparées.

On en déduit que $\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur tout segment } [c,d] \subset \mathbb{R}_*^+, \text{ donc sur } \mathbb{R}_*^+}$ et pour tout $a > 0$, $G'(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-(1+u)a}a^{x+y-1}\,\mathrm{d}u$.

---

II.C.7) Soit $a > 0$. On a alors $G'(a) = a^{x+y-1}\mathrm{e}^{-a}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-au}\,\mathrm{d}u = a^{x+y-1}\mathrm{e}^{-a}\frac{\Gamma(x)}{a^x}$ d'après la question II.A.2, donc $\boxed{G'(a) = a^{y-1}\mathrm{e}^{-a}\Gamma(x).}$

---

II.C.8) On a pour tout $a>0$, par théorème fondamental de l'analyse et vu les questions précédentes que $G(a) = G(0) + \displaystyle\int_0^a G'(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^a t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\Gamma(x)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a\to+\infty]{} \Gamma(x)\Gamma(y)$.

Or vu la question II.C.5 et par unicité de la limite, $\Gamma(x)\Gamma(y) = \beta(x,y)\Gamma(x+y)$. On a ainsi démontré la relation $(\mathscr{R})$ pour tous $x>1$ et $y>1$ et vu la question II.C.1, $\boxed{(\mathscr{R}) \text{ est valable pour tous} >0 \text{ et } y>0.}$

## III La fonction digamma

III.A. Soit $x>0$. En dérivant la relation admise $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ (la dérivabilité est aussi admise), on obtient $\Gamma'(x+1)=\Gamma(x)+x\Gamma'(x)$ ce qui donne $\psi(x+1)=\dfrac{\Gamma(x)+x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)}$ ce qui donne $\boxed{\psi(x+1)-\psi(x)=\dfrac{1}{x}.}$

III.B.1) On a pour tous $x>0$ et $y>0$, $\beta(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ avec $\Gamma$ dérivable et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ y\mapsto\beta(x,y) \text{ est bien dérivable sur } \mathbb{R}_*^+.}$

On obtient, en dérivant par rapport à $y>0$ à $x>0$ fixé que

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)=\Gamma(x)\frac{\Gamma'(y)\Gamma(x+y)-\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)^2}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}-\frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right)$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)=\beta(x,y)\big(\psi(y)-\psi(x+y)\big).}$

III.B.2) Soit $x>0$. Si $0<y<y'$, alors pour tout $t\in]0,1[$,

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}=t^{x-1}\mathrm{e}^{(y-1)\ln(1-t)}\geqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{(y'-1)\ln(1-t)}=t^{x-1}(1-t)^{y'-1}$$

donc par croissance de l'intégrale, $\beta(x,y)\geqslant\beta(x,y')$ et $\boxed{y\mapsto\beta(x,y) \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_*^+.}$

III.B.3) Comme par ailleurs, par positivité de l'intégrale, $\beta$ est positive, on déduit des deux questions précédentes que pour tous $x>0$ et $y>0$, $\psi(y)-\psi(x+y)\leqslant 0$ puis que $\boxed{\psi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_*^+.}$

III.C.1) Soit $x>-1$ et $n\geqslant 1$. Avec III.A puis par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)=\sum_{k=1}^{n}\big(\psi(k+1)-\psi(k)-\psi(k+x+1)+\psi(k+x)\big)=\psi(n+1)-\psi(1)-\psi(n+x+1)+\psi(1+x)$$

donc $\boxed{\psi(1+x)-\psi(1)=\psi(n+x+1)-\psi(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).}$

III.C.2) Soit $n\geqslant 2$, $x>-1$. Par croissance de $\psi$ (III.B.3) on a déja $0\leqslant\psi(n+x+1)-\psi(n)$ (avec $x+1>0$). Puis, toujours par croissance, comme $x\leqslant p$,

$$\psi(n+x+1)-\psi(n)\leqslant\psi(n+p+1)-\psi(n)=\sum_{k=n}^{n+p}\big(\psi(k+1)-\psi(k)\big)=\sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k}=H_{n+p}-H_{n-1}\leqslant\sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{n}=\frac{p+1}{n}$$

par télescopage et la question III.A.

Finalement, $\boxed{0\leqslant\psi(n+x+1)-\psi(n)\leqslant H_{n+p}-H_{n-1}\leqslant\dfrac{p+1}{n}.}$

III.C.3) De la question précédente, on tire par encadrement, à $x$ fixé, que $\psi(n+x+1)-\psi(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et comme $\psi(n+1)-\psi(n)=\dfrac{1}{n}\to 0$, on a aussi $\psi(n+x+1)-\psi(n+1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

En faisant $n\to+\infty$ dans la relation de la question III.C.1, on tire $\boxed{\psi(x+1)-\psi(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right),}$ la convergence de la série étant assurée par la limite ci-dessus.

III.D.1) Soit, pour $n \geqslant 2$, $g_n : x \in [-1,+\infty[ \mapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions.

**H1** Pour tout $n \geqslant 2$, $g_n \in \mathscr{C}^\infty([-1,+\infty[)$.

**H2** $\sum g_n$ converge simplement sur $[-1,+\infty[$ vu la question précédente.

**H3** Soit $k \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 2$ et $x \in [-1,+\infty[$, $\left|g_n^{(k)}(x)\right| = \left|\dfrac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}\right| = \dfrac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \dfrac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ qui est indépendant de $x$ et terme général de série convergence car $k+1>1$, par critère de Riemann.

Donc $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,+\infty[$.

Alors $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [-1,+\infty[}$ et pour tout $k \geqslant 1$ et $x \geqslant -1$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} g_n^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}$ en particulier $\boxed{g_n^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}k!(\zeta(k+1)-1).}$

III.D.2) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à $g$ sur $[0,x]$ avec $x \in ]-1,1[$, $g$ étant bien de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$ :

$$\left|g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} \left|g^{(n+1)}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(k-1)^{n+2}} \leqslant |x|^{n+1} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^2} = \zeta(2)|x|^{n+1}$$

donc $\boxed{\left|g(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \zeta(2)|x|^{n+1}}$ et comme $\zeta(2)|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $x \in ]-1,1[$, on en déduit que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

donc $\boxed{g \text{ est bien développable en série entière sur } ]-1,1[.}$

III.D.3) Vu les trois questions précédentes (et $g(0)=0$), on tire, pour $x \in ]-1,1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + g(x) = \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}(\zeta(n+1)-1)\,x^n$$

et comme $\dfrac{1}{1+x} - 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n$, on a bien $\boxed{\psi(1+x) = \psi(1) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n.}$

IV.A. De la relation $(\mathscr{R})$ on tire que l'on peut dériver $\beta$ indéfiniment par rapport à chacune de ses variables, donc $\boxed{B \text{ (lire Bêta majuscule !) est bien définie sur } \mathbb{R}_*^+.}$ C'est aussi une conséquence de III.B.1.

Vu III.B.1, en dérivant par rapport à $y$ puis en évaluant en $y=1$, on tire, pour $x>0$,

$$B(x) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,1)\big(\psi(1) - \psi(x+1)\big) + \beta(x,1)\big(\psi'(1) - \psi'(x+1)\big) = \beta(x,1)\Big(\big(\psi(1) - \psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1) - \psi'(x+1)\big)\Big)$$

or $\beta(x,1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ d'où $\boxed{x B(x) = \big(\psi(1) - \psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1) - \psi'(x+1)\big).}$

Comme $\psi$ est un quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur est strictement positif, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$ donc vu la formule précédente, $\boxed{B \text{ l'est aussi}}$ par opérations.

IV.B.1) On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^2$ sous le signe intégrale.

Soit $x>0$, $b : (t,y) \in ]0,1[ \times \mathbb{R}_*^+ \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{x-1}\mathrm{e}^{(y-1)\ln(1-t)}$.

**H1** Pour tout $t \in ]0,1[$, $y \mapsto b(t,y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par opérations, et pour $k \in \{1,2\}$,

$$\frac{\partial^k b}{\partial y^k} : (t,y) \mapsto (\ln(1-t))^k \, t^{x-1}(1-t)^{y-1}.$$

(Le programme ne demande pas de préciser que pour tout $y > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k b}{\partial y^k}(t,y)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$ par opérations.)

**H2** Pour tout $y > 0$, $t \mapsto b(t,y)$ est intégrable sur $]0,1[$ comme déjà vu en II.B.1.

**H3 : Domination locale** Soit $k \in \{1,2\}$. (Pour $k = 1$, on pourrait se contenter de l'intégrabilité, mais cela ne coûte pas plus cher.)

Soit $\alpha \in ]0,1[$. Pour tout $(t,y) \in ]0,1[ \times [\alpha,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^k b}{\partial y^k}(t,y)\right| \leqslant \varphi(t) = |\ln(1-t)|^k \, t^{x-1}(1-t)^{\alpha-1}$ avec $\varphi$ continue sur $]0,1[$, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{k+x-1} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $\varphi$ intégrable sur $]0,1/2]$ car prolongeable par continuité en $0$ et $\varphi(t) \underset{t\to 1}{\sim} |\ln(1-t)|^k (1-t)^{\alpha-1} = \underset{t\to 1}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{(1-t)^\delta}\right)$ avec $1-\alpha < \delta < 1$, donc $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^\delta}$ intégrable sur $[1/2,1[$ comme fonction de Riemann, donc par comparaison de fonctions positives, $\varphi$ l'est.

On obtient finalement qu'en particulier pour $y = 1$, $\boxed{B(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 \, t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

---

IV.B.2) On imagine pouvoir dériver sous le signe intégrale. On obtient, pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{B^{(p)}(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln t)^p \, t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$$

---

IV.B.3) Soit $r \geqslant 2$ et $x > 0$. $B^{(r-2)}(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2} \, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

Appliquons le théorème de convergence dominée avec $f : (x,t) \mapsto (\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2} \, t^{x-1}$.

**H1** Pour tout $t \in ]0,1[$, $f(x,t) = (\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2} \, \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t} = g(t)$

(Le programme ne demande pas de préciser que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto f(x,t)$ et $g$ sont toutes continues (par morceaux) sur $]0,1[$.)

**H2 Domination** Pour tout $(x,t) \in ]0,+\infty[ \times ]0,1[$, $\left|f(x,t)\right| \leqslant \left|g(t)\right|$ avec $\left|g\right|$ intégrable vu la question I.F.2.

On en déduit que $\boxed{B^{(r-2)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2 (\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t = (-1)^r 2(r-2)! S_r}$ d'après la question I.F.2.

---

IV.B.4) En particulier, $S_2 = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0^+} B(x)$.

Mais par IV.A,

$$B(x) = \frac{\psi(1+x)-\psi(1)}{x}\big(\psi(1+x)-\psi(1)\big) - \frac{\psi'(1+x)-\psi'(1)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \psi'(1)\big(\psi(1)-\psi(1)\big) - \psi''(1) = -\psi''(1),$$

$\psi$ étant bien deux fois dérivable en $1$ (elle de classe $\mathscr{C}^\infty$).

Mais le développement de III.D.3 donne, avec $\Lambda : s \mapsto \psi(1+x)$, $\psi''(1) = \Lambda''(0) = \dfrac{(-1)^3\zeta(3)}{2!}$ d'où $\boxed{S_2 = \zeta(3).}$

---