Exercice 2 : sommabilité

1. On a affaire à une somme double produit. Comme les termes sont positifs, quitte à travailler dans $[0,+\infty]$, on peut toujours écrire

$$\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{p^2q^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}=\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2<+\infty$$

Comme le résultat est fini, $\boxed{\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}\text{ est sommable et }\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{p^2q^2}=\frac{\pi^4}{36}.}$

2. **Première méthode** On remarque que pour tout $(p,q)\in A$, $\dfrac{1}{p^2+q^2}\geqslant\dfrac{1}{(p+q)^2}\geqslant 0$.

   Puis par une sommation par diagonale (sommation par paquets $A=\bigsqcup_{n=2}^{+\infty}D_n$ où

$$D_n=\{(p,q)\in A,\ p+q=n\}=\{(p,n-p),\ 1\leqslant p\leqslant n-1\}$$

   on peut écrire dans $[0,+\infty]$

$$\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{p^2+q^2}\geqslant\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{(p+q)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2}=+\infty$$

   Car $\dfrac{n-1}{n^2}\sim\dfrac{1}{n}$ est un terme général positif de série divergente.

   Donc $\displaystyle\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{p^2+q^2}=+\infty$ et $\boxed{\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}\text{ n'est pas sommable.}}$

   Deuxième méthode Par le théorème de Fubini dans le cas positif, dans $[0,+\infty]$, on a

$$\sum_{(p,q)\in A}\frac{1}{p^2+q^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}$$

   et on montre la divergence de la série de terme général $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}$ par comparaison à une intégrale. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. La fonction $f_p: t\mapsto\dfrac{1}{p^2+t^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   On a donc pour tout $q\in\mathbb{N}^*$, $f_p(q)\geqslant\displaystyle\int_q^{q+1}f_p(t)\,\mathrm{d}t$ donc en sommant et en passant à la limite, la série $\displaystyle\sum_{q\geqslant 1}\frac{1}{p^2+q^2}$ étant bien convergente,

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{p^2+t^2}=\frac{1}{p}\int_1^{+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}t}{p}}{1+\left(\frac{t}{p}\right)^2}=\frac{1}{p}\left[\operatorname{Arctan}\frac{t}{p}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{p}\right)\geqslant\frac{\pi}{4p}$$

   Or $\sum\dfrac{1}{p}$ diverge donc, par comparaison de termes positifs, $\displaystyle\sum_p\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}\right)$ diverge et

$$\boxed{\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}\text{ n'est pas sommable.}}$$