Exercice 1 :

Supposons qu'il existe une fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ développable solution sur $]-r, r[$ où $r > 0$ de l'équation différentielle (E).

Alors, par propriété des séries entières, pour tout $x \in]-r, r[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

On a donc, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned}
x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(x^2 - x\right) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) - n + 2) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \\
&= 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(n^2 - 2n + 2\right) a_n + (n-1) a_{n-1}\right) x^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par unicité des cœfficients du développement en série entière, comme $r > 0$, on tire $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1-n}{(n-1)^2 + 1} a_{n-1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{il n'y a pas d'autre solution DSE sur }]-r, r[\text{ avec } r > 0 \text{ que la fonction nulle.}}$

Exercice 2 :

Par sommation d'une famille à termes réels positifs, symétrie, puis somme double produit, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{2^{i+j}} = 2 \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \left(\frac{i}{2^i} \times \frac{1}{2^j}\right) = 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme la série entière $\sum n x^n$ a un rayon de convergence de 1 et $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, les sommes ci-dessus sont finies et $\boxed{\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable.}}$

Ensuite, si $f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ est la dérivée de $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, donc $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = x f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Finalement, $\boxed{\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 8.}$

On peut aussi s'en sortir en sommant par paquets (sommation par diagonales : $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} D_n$ avec $D_n = \{(i, n-i),\ i \in [\![0,n]\!]\}$ de cardinal $n+1$) :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 8$$

Problème : Fonctions Gamma et Digamma

I. Partie préliminaire

1. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $h_x\ :\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t+(x-1)\ln t}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.

   Intégrabilité sur $[1,+\infty[$ **:** par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente : f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$. (Ici, pas de condition sur x.)

   Intégrabilité sur $]0,1]$ **:** $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $x > 0$, donc f_x est intégrable sur $]0,1]$.

   Donc $\boxed{h_x \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

   (b) Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction h_x est continue, positive, non constamment nulle sur $]0,+\infty[$, donc par positivité améliorée (version intégrale généralisée), $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) > 0.}$

   (c) On définit $h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ \times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \end{array}\right.$ On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ sous le signe intégrale.

   H1 Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, de dérivée

   $$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}.$$

   (Le programme ne demande pas de vérifier que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.)

   H2 Pour tout $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 1.a.

   H3 : Domination locale On domine sur tout segment : soit $0 < a < b$. On a

   $$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) = \begin{cases} -\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ \ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} t^{b-1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

   où ϕ est une fonction continue par morceaux, positive sur $]0,+\infty[$, et intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} t^{b-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et sur $]0,1]$ car $-\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1-a < \alpha < 1$ par croissances comparées, donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ et } \Gamma' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

2. On démontre que la série télescopique $\sum (H_{n+1} - H_n)$ converge.

   Or $n \geqslant 2$, $u_n = H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ somme d'un terme général de série télescopique convergente et d'un terme général de série absolument convergente donc convergente par comparaison à une série de Riemann convergent (à termes positifs).

Donc $\sum(H_{n+1}-H_n)$ converge, donc $(H_n)_n$ converge : $\boxed{H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.}$

II. Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

3. (a) La fonction $\ln$ est concave (car dérivable à dérivée décroissante) sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sa courbe se situe sous la tangente en 1 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_*^+,\ \ \ln t \leqslant t-1$$

et donc $\boxed{\text{pour tout } x = 1-t < 1,\ \ln(1-x) \leqslant -x.}$

Soit $x>0$ et $t>0$.

- Si $t>n$, on a bien $0 = f_n(t) \leqslant e^{-t}\,t^{x-1}$.
- Si $t \leqslant n$, alors $0 \leqslant f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{t}{n}}\,t^{x-1} = e^{-t}\,t^{x-1}$.

Dans tous les cas, $\boxed{0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}\,t^{x-1}.}$

(b) Soit $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On applique le théorème de convergence dominée :

H1 Pour tout $t>0$, à partir du rang $n = \lceil t \rceil$,

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t+\mathrm{o}(1)}\,t^{x-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t) = \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$$

(le programme ne demande pas de préciser que f et toutes les f_n sont continues (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.)

H2 Domination Comme vu à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t>0$, $\left|f_n(t)\right| \leqslant f(t)$ avec f continue (par morceaux), positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ vu la question 1.a.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^n \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).}$

4. (a) Soit $x>0$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est continue et positive sur $]0,1]$ et $(1-u)^n u^{x-1} \sim \dfrac{1}{u^{1-x}}$ au voisinage de 0, avec $1-x<1$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\boxed{I_n(x) \text{ existe bien.}}$

Soit $n \geqslant 1$. On procède à une intégration par parties, $u \mapsto (1-u)^n$ et $u \mapsto \dfrac{u^x}{x}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. Soit $\varepsilon>0$.

$$\int_\varepsilon^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u = \left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_\varepsilon^1 + \frac{n}{x}\int_\varepsilon^1 (1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u = -(1-\varepsilon)^n\frac{\mathrm{e}^{x\ln\varepsilon}}{x} + \frac{n}{x}\int_\varepsilon^1 (1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u$$

puis, en faisant $\varepsilon \to 0$, $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{x}I_{n-1}(x+1).}$

(b) Soit $x>0$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question précédente, on obtient

$$I_n(x) = \frac{n}{x}I_{n-1}(x+1) = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}I_{n-2}(x+2) = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}I_{n-n}(x+n)$$

(par récurrence finie). Or $I_0(x+n)=\int_0^1 u^{x+n-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1^{x+n}}{x+n}=\frac{1}{x+n}$.

Donc $\boxed{I_n(x)=\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$

(c) Soit $x\in]0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}$. À l'aide d'un changement de variable $u=\frac{t}{n}$ (avec $t\mapsto\frac{t}{n}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de $]0,n[$ dans $]0,1[$),

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1}\,\mathrm{d}t=n\int_0^1(1-u)^n\ (nu)^{x-1}\,\mathrm{d}u=n^x I_n(x)$$

donc avec la question 3.b et la question précédente, $\boxed{\frac{n!\ n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\Gamma(x).}$

---

5. Montrons la formule proposée dans l'énoncé : soit $n\geqslant 1$ et $x\in]0,+\infty[$.

$$\mathrm{e}^{xH_n}=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}\right)\mathrm{e}^{-x\ln n}=\frac{1}{n^x\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}}$$

ce qui donne bien $\boxed{\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=\mathrm{e}^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right].}$

On a ensuite $\frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!\ n^x}=\frac{x\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}}{n^x}=\frac{x}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=x\mathrm{e}^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\Gamma(x)}$ d'après la question précédente et en utilisant le fait que $\Gamma(x)\neq 0$ (question 1.b).

Comme de plus $x\mathrm{e}^{xH_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}x\mathrm{e}^{\gamma x}\neq 0$ (question 2.b), on en déduit que $\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]\right)_n$ converge, et en notant $\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]$ sa limite, on obtient par unicité de la limite

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].}$$

---

6. (a) La convergence simple de la série de fonctions provient directement du fait que pour tout $x>0$,

$$0\leqslant\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

mais ce n'est pas ce qui est attendu ici.
Soit $x>0$. La question précédente nous a donné le fait que

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{x\Gamma(x)\mathrm{e}^{\gamma x}}>0$$

donc par continuité du $\ln$, $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$ converge, vers $-\ln x-\ln\Gamma(x)-\gamma x$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right] \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$

(b) Vu la remarque de la question précédente, on a $g : x \mapsto -\ln x - \ln\Gamma(x) - \gamma x$ de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations vu ce qui a été montré en 1.c.
Mais il faut utiliser le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions pour exprimer g' sous forme de somme de série. Soit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : x \in]0,+\infty[\mapsto \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}$.

H1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, g_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, de dérivée $g_k' : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k+x} - \dfrac{1}{k}$.

H2 D'après la question précédente, $\sum_{k\geqslant 1} g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_*^+$.

H3 Soit $a > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0,a]$, $\left|g_k'(x)\right| = \left|\dfrac{-x}{k(k+x)}\right| = \dfrac{x}{k(k+x)} \leqslant \dfrac{a}{k^2}$ qui est un terme général de série convergente et ne dépend pas de x donc $\sum_{k\geqslant 1} g_k'$ converge normalement donc uniformément sur $]0,a]$ pour tout $a>0$ donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_*^+$.

On en déduit que $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_*^+}$ (ce que l'on avait déjà) et surtout que

$$\boxed{\text{pour tout } x>0,\ g' : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right).}$$

(c) Les résultats de la question précédente donnent alors, pour $x>0$,

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \gamma$$

donc $\boxed{\psi(x) = \dfrac{-1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).}$

7. (a) Par la question précédente, en télescopant, $\psi(1) = -1-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = -1-\gamma+1$ donc $\boxed{\psi(1)=-\gamma.}$

Vu la question 1.c, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t =} \ \Gamma'(1) = \psi(1)\Gamma(1) = -\gamma\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \boxed{-\gamma.}$

(b) Soit $x \in]0,+\infty[$. Avec la question 6.c, $\psi(x+1)-\psi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+1+x}\right)$, donc, par télescopage, $\boxed{\psi(x+1)-\psi(x) = \dfrac{1}{x}.}$

(Résultat qui se retrouve aussi avec la célèbre formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$...)

On a alors pour tout entier $n \geqslant 2$, par telescopage, $\psi(n)-\psi(1) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\psi(k+1)-\psi(k)\right)$, ce qui donne

$\boxed{\psi(n) = -\gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$ avec ce qui précède et la question précédente.

(c) Soit $x>0$ et $k\in\mathbb{N}$.

Pour tout $y>0$, $\left|j_k(y)\right|=\left|\frac{1}{k+y+1}-\frac{1}{k+y+x}\right|=\frac{|x-1|}{(k+y+1)(k+y+x)}\leqslant\frac{|x-1|}{k^2}$ qui ne dépend pas de y est un terme général de série convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} j_k \text{ converge normalement donc uniformément sur }]0,+\infty[.}$

D'après 6.c,

$$\psi(x+y)-\psi(1+y)=\frac{1}{1+y}-\frac{1}{x+y}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x+y}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+y+1}\right)=\frac{1}{1+y}-\frac{1}{x+y}+\sum_{k=1}^{+\infty}j_k(y).$$

On calcule la limite pour $y\to+\infty$ avec le théorème de la double limite : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $j_k(y)\xrightarrow[y\to+\infty]{}0$ et $\sum_{k\geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, donc $\psi(x+y)-\psi(1+y)\xrightarrow[y\to+\infty]{}0$.

On en déduit alors que $\boxed{\psi(x+n)-\psi(1+n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.}$

---

8. D'après la question 7, la fonction Digamma ψ convient au problème posé.
Respectivement, si f est solution du problème, soit $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$.
On a alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f(x+k+1)-f(x+k)=\frac{1}{x+k}$, donc

$$f(x+n)-f(x+1)=\sum_{k=1}^{n-1}\big(f(x+k+1)-f(x+k)\big)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x+k}.$$

ainsi, $f(x+n)=f(x)+\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x+k}$.

En particulier pour $x=1$, $f(1+n)=f(1)+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Donc $f(x+n)-f(1+n)=f(x)+\frac{1}{x}+\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n}$.

Par unicité de la limite pour $n\to+\infty$, on tire $f(x)+\frac{1}{x}+\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right)=0=f(x)-\psi(x)$, la convergence de la série et l'expression de ψ provenant de la question 6.
Donc $f=\psi$.

Finalement, $\boxed{\psi \text{ est l'unique solution au problème posé.}}$