Corrigé Mines-Ponts Maths 2 MP 2016

A Une intégrale à paramètre

1. ψ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

   Étude sur $]0,1]$: $0 \leqslant \psi(u) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ intégrable sur $]0,1]$ par Riemann, donc ψ l'est.

   Étude sur $[1,+\infty[$: $\psi(u) = \underset{u\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ par croissances comparées, donc par comparaison à une fonction de Riemann, ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

   Finalement, $\boxed{\psi \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

2. Si $x<0$, $f_x : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ n'est pas définie sur $]0,+\infty[$ (et encore moins continue par morceaux), donc $F(x)$ n'est pas définie.
   Si $x \geqslant 0$, f_x est bien continue et positive sur $]0,+\infty[$, la convergence de l'intégrale équivaut alors à l'intégrabilité de f. Or

   Si $x=0$, $f_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ par Riemann, donc f_x ne l'est pas non plus.

   Si $x>0$, $0 \leqslant f_x(u) \leqslant \dfrac{1}{x}\psi(u)$ donc, avec la question précédente et par comparaison, f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{F(x) \text{ est défini si et seulement si } x \in I =]0,+\infty[.}$

3. On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale. Soit $f : (x,u) \in I^2 \to f(x,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$.

   H1 Pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(x,u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations sur I, de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,u) \mapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$.

   H2 Pour tout $x \in I$, $u \mapsto f(x,u)$ est intégrable sur I vu la question précédente.

   H3 **Domination** : Si $a>0$, pour tout $x \geqslant a$ et tout $u \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \phi_a(u) = \dfrac{1}{a^2}\psi(u)$ avec ϕ_a intégrable sur I d'après la question 1.

   Ainsi, $\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ et pour tout } x \in I,\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u.}$

4. On écrit $xF'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+u-u)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = -F(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$ et dans cette dernière intégrale, qui existe bien, on fait une intégration par partie en dérivant $u \mapsto \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}$ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$) et en intégrant $u \mapsto \dfrac{1}{(u+x)^2}$ (qui est bien continue), avec $0<\varepsilon<A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}}{u+x}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \left(-\sqrt{u} + \frac{1}{2\sqrt{u}}\right)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u+x}\,\mathrm{d}u$$
$$\underset{\varepsilon\to 0,\ A\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(2u-1)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{(u+x-x)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}F(x) - K + xF(x)$$

   et au final, $\boxed{xF'(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)F(x) = -K.}$

5. G est dérivable sur I (et même de classe $\mathscr{C}^1$) et pour tout $x \in I$,

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-\sqrt{x}F(x) + \frac{F(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}F'(x)\right) = \frac{-K\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

en utilisant la question précédente, qui est aussi l'expression de la dérivée de $x \mapsto -K\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ par théorème fondamental et continuité et intégrabilité de $\psi : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ sur tout $]0, x]$ (et même sur I, en fait vu la question 1). Comme I est un intervalle,

$\boxed{\text{on a donc une constante } C \in \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } x \in I,\ G(x) = C - K\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.}$

---

6. $\boxed{G(x) \xrightarrow[x\to 0]{} C}$ car $\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ce qui peut se voir en écrivant par exemple

$$\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 0$$

par définition des intégrales généralisées convergentes.

Comme ψ est intégrable, $\boxed{G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C - K^2.}$

D'autre part, $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{-(u+x)}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u$. Avec le changement de variable $t = u/x$ (bijectif, de classe $\mathscr{C}^1$) on obtient $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(t+1)}}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

On applique le théorème de convergence dominée, avec $g(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x(t+1)}}{\sqrt{t}(t+1)}$.

H1 Pour tout $t \in I$, $g(x,t) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}$ et $g(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

H2 **Domination** : Si $x, t \in I$,

$$\left|g(x,t)\right| \leqslant \phi(t) = \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}$$

où ϕ est continue, positive sur I et équivalente respectivement à $\frac{1}{t^{1/2}}$ et $\frac{1}{t^{3/2}}$ en 0 et $+\infty$ donc intégrable sur I par comparaison à des intégrales de Riemann.

Ainsi, $G(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)\sqrt{t}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\Big[\mathrm{Arctan}\, u\Big]_0^{+\infty}$ avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$, donc $\boxed{G(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \pi}$ et $\boxed{G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0}$ (Pour cette dernière, on peut aussi voir que $0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{K}{x}$ donc $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.)

Par unicité de la limite, on en déduit que $C = 0$ et $C - K^2 = \pi$, d'où $\boxed{K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.}$

B Étude de deux séries de fonctions

7. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.

H2 Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\left|f_n(x)\right| \leqslant \dfrac{e^{-na}}{\sqrt{n}}$ qui ne dépend pas de x, donc les f_n sont bornées et

$$\left\|f_n\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum \dfrac{e^{-na}}{\sqrt{n}}$ puis $\sum \left\|f_n\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$ sont convergentes, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } I,}$ et, exactement de la même manière, $\boxed{g \text{ est définie et continue sur } I.}$

8. Soit $x \in I$. $u \mapsto \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ étant décroissante, continue et intégrable sur I (comme dans la question 1), une comparaison série intégrale nous donne, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{N+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{N} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du$$

En faisant $N \to +\infty$, on obtient $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du.}$

Le changement de variable $t = ux$ ($\mathscr{C}^1$ bijectif) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \sim \frac{K}{\sqrt{x}}$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{K}{\sqrt{x}}.$$

Par encadrement, on en tire $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}.}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)} + n + 1} \\
&= \frac{-1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n(n+1)} + n + 1\right)} \\
&= \frac{-1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n} + o\left(\sqrt{n}\right)\right)\left(n + o(n) + n + o(n)\right)} \\
&\sim \frac{-1}{4n^{3/2}}
\end{aligned}$$

qui est le terme général négatif d'une série convergente (Riemann), donc par télescopage,

$$\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$$

---

10. Soit $x > 0$. En travaillant dans $[0, +\infty]$ a priori, on applique le théorème de Fubini positif à $a_{n,k} = \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{k}}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$, 0 sinon. On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}(1-e^{-x})} = \frac{f(x)}{1-e^{-x}}.$$

Le résultat étant fini, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} \text{ converge}}$ et que $\boxed{h(x) = \dfrac{f(x)}{1-e^{-x}} \text{ pour tout } x \in I.}$

Autre rédaction possible : On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} \leqslant ne^{-nx}$ or $n^3 e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui prouve que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} \text{ converge.}}$

On considère les séries de termes généraux $a_k = \dfrac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}$ si $k \neq 0$, 0 sinon et $b_k = e^{-kx}$ géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$. Ces séries sont absolument convergentes de sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = f(x)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

On effectue le produit de Cauchy de ces séries absolument convergentes : $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x}$ avec $c_0 = 0$.

donc $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ Ainsi $\boxed{h(x) = \dfrac{f(x)}{1-e^{-x}} \text{ pour tout } x \in I.}$

---

11. Quand $x \to 0$, on a $1 - e^{-x} \sim x$ donc avec 8., on a $\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}}$

On a $2g(x) + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)e^{-nx} = h(x)$ donc $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(h(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)e^{-nx}\right)$

Toute suite convergente étant bornée, le 9. nous fournit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right| \leqslant M$

Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)e^{-nx}\right| \leqslant M\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \dfrac{M}{e^x - 1} \sim \dfrac{M}{x}$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right)\mathrm{e}^{-nx}=\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(h(x))$ donc $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{2}h(x)$

Ainsi $\boxed{g(x) \text{ est équivalent à } \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} \text{ lorsque } x\to 0}$

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12. Si A est finie alors $f_A : x\mapsto \displaystyle\sum_{n\in A}\mathrm{e}^{-nx}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\boxed{\text{si } A \text{ est fini, alors } I_A=[0,+\infty[}$

    On suppose désormais que A est infini.

    On définit φ par récurrence par $\varphi(0)=\min A$ et $\varphi(n+1)=\min\big(A\setminus\{\varphi(k)/0\leqslant k\leqslant n\}\big)$

    Par construction la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A donc telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{\varphi(n)}=1$

    $\boxed{\text{on peut extraire une suite } (b_n)=\big(a_{\varphi(n)}\big) \text{ de la suite } (a_n) \text{ telle que pour tout } n\in\mathbb{N},\ b_n=1}$

    Soit $x=0$, la suite $(a_n\mathrm{e}^{-nx})$ ne converge pas vers 0 avec la suite extraite $\big(b_n\mathrm{e}^{-\varphi(n)x}\big)=(1)_{n\geqslant 0}$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n\mathrm{e}^{-nx}$ diverge grossièrement.

    Si $x>0$, on a $|a_n\mathrm{e}^{-nx}|\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$ ce qui donne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n\mathrm{e}^{-nx}$

    Ainsi $\boxed{\text{si } A \text{ est infini, alors } I_A=]0,+\infty[}$

13. Soit $x>0$, on a : $f_A(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathrm{e}^{-kx}$ et $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}$

    On remarque que pour $n\in\mathbb{N}$,on a $\mathrm{Card}(A(n))=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$, on peut donc faire le produit de Cauchy de ces deux séries absolument convergentes pour obtenir : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Card}(A(n))\mathrm{e}^{-nx}=\frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}}$

14. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $A_1(n)=\{k^2/k\in\mathbb{N}^* \text{ et } k^2\leqslant n\}=\{k^2/k\in\mathbb{N}^* \text{ et } k\leqslant\sqrt{n}\}$ donc $A_1(n)=\{k^2/1\leqslant k\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ de cardinal $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$

    Soit $x>0$. À l'aide de la question précédente $\boxed{\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lfloor\sqrt{n}\rfloor\mathrm{e}^{-nx}}$

    Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[0,1]$ donc $0\leqslant\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}-\frac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ donc

    $$(1-\mathrm{e}^{-x})g(x)-1\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant(1-\mathrm{e}^{-x})g(x)$$

    car $1-\mathrm{e}^{-x}>0$. Or d'après 11., $(1-\mathrm{e}^{-x})g(x)$ équivaut à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x\to 0$ donc $\dfrac{2\sqrt{x}f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement. Ainsi $\boxed{f_{A_1}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$ donc $xf_{A_1}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{x}\pi}{2}$ donc $\boxed{A_1\in S \text{ et } \Phi(A_1)=0}$

15. Soit $x>0$. On note la suite (a_n) associée à l'ensemble $A=A_1$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $v(n)=\text{Card}\left(\left\{(\alpha,\beta)\in A_1^2/\alpha+\beta=n\right\}\right)=\text{Card}(\{(k,n-k)/k\in A_1 \text{ et } n-k\in A_1\})$, donc

$$v(n)=\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}$$

car $a_0=0$ et aussi $v(0)=0=\sum_{k=0}^{0}a_k a_{0-k}$.

On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\sum_{k\geqslant 0}a_k\mathrm{e}^{-kx}$ absolument convergente par elle-même pour obtenir que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}v(n)\mathrm{e}^{-nx} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}v(n)\mathrm{e}^{-nx}=(f_{A_1}(x))^2.}$

Pour $n\in\mathbb{N}$. On note $a^{(2)}(n)$ le terme de la suite (a_n) associée à l'ensemble A_2.

On a $a^{(2)}(n)\leqslant v(n)$ ainsi $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ f_{A_2}(x)\leqslant(f_{A_1}(x))^2}$ donc $xf_{A_2}(x)\leqslant(\sqrt{x}f_{A_1}(x))^2$ d'où $\boxed{\Phi(A_2)\leqslant\frac{\pi}{4}}$

D Étude de deux séries de fonctions

16. Soit $\psi_1,\psi_2\in E$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $x>0$.
On a $\left|\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})\right|\leqslant\|\psi_1\|_\infty\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})$ converge par comparaison entre séries à termes positifs donc $L(\psi_1)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a $L(\lambda\psi_1+\psi_2)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\left(\lambda\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})+\psi_2(\mathrm{e}^{-nx})\right)\right)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})+\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_2(\mathrm{e}^{-nx})$

Donc $L(\lambda\psi_1+\psi_2)(x)=\lambda L(\psi_1)(x)+L(\psi_2)(x)$ puis $L(\lambda\psi_1+\psi_2)=\lambda L(\psi_1)+L(\psi_2)$.

Donc $\boxed{L \text{ est bien définie sur } E \text{ et l'application } L \text{ est une application linéaire de } E \text{ vers } \mathbb{R}^I}$

Erreur d'énoncé ? Selon lequel, l'espace d'arrivée serait $\mathbb{R}^{[0,1]}$) !

On suppose que $\psi_1\leqslant\psi_2$ On a pour tout $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_1(\mathrm{e}^{-nx})\leqslant\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\psi_2(\mathrm{e}^{-nx})$ car $\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}\geqslant 0$, donc $L(\psi_1)(x)\leqslant L(\psi_2)(x)$ par comparaison de séries .

Ainsi, $\boxed{\text{pour tous } \psi_1,\psi_2 \text{ dans } E,\ \psi_1\leqslant\psi_2 \text{ entraîne } L(\psi_1)\leqslant L(\psi_2)}$

---

17. On a bien $E_1\subset E$ (i) et $E_1\neq\varnothing$ (ii) car $\theta: x\in[0,1]\mapsto 0$ vérifie $\theta\in E$ et $\lim_{x\to 0}x(L(\theta))(x)=0$
Soit $\psi_1,\psi_2\in E_1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Pour $x>0$, on a $x(L(\lambda\psi_1+\psi_2))(x)=\lambda x(L(\psi_1))(x)+x(L(\psi_2))(x)$ donc par combinaison linéaire de limites on a

$$\lim_{x\to 0}x(L(\lambda\psi_1+\psi_2))(x)=\lambda\lim_{x\to 0}x(L(\psi_1))(x)+\lim_{x\to 0}x(L(\psi_2))(x).$$

Ceci prouve que $\lambda\psi_1+\psi_2\in E_1$ donc E_1 est stable par combinaison linéaire (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), $\boxed{E_1 \text{ est un sous espace vectoriel de } E}$

De plus $\Delta(\lambda\psi_1+\psi_2)=\lambda\Delta(\psi_1)+\Delta(\psi_2)$ et $\Delta: E_1\longrightarrow\mathbb{R}$ donc Δ est une forme linéaire de E_1.

De plus $\left|x(L(\psi_1))(x)\right|\leqslant\|\psi_1\|_\infty x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\mathrm{e}^{-nx}$

Par passage à la limite en 0, on a $\left|\Delta(\psi_1)\right|\leqslant\ell\|\psi_1\|_\infty$ d'où

$$\boxed{\text{l'application } \Delta \text{ est une forme linéaire continue de } (E_1,\|\ \|_\infty)}$$

---

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $e_p \in E$ car continue par morceaux sur $[0,1]$.

Soit $x>0$. On a $L(e_p)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-n(p+1)x}$ donc $xL(e_p)(x)=\dfrac{[(p+1)x]\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-n[(p+1)x]}}{p+1}$ et $(p+1)x>0$

Par composition de limites, on a $\boxed{\Delta(e_p)=\dfrac{1}{p+1} \text{ et } e_p \in E_1.}$ On remarque que $\Delta(e_p)=\ell\displaystyle\int_0^1 e_p$.

Donc par combinaison linéaire , pour toute fonction polynomiale P, on a $\Delta(P)=\ell\displaystyle\int_0^1 P$.

Soit $\psi \in E_0$. Le théorème de Weierstrass nous fournit une suite de fonction polynomiale (P_k) qui converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$.
Soit $x>0$. Soit $k\in\mathbb{N}$. On a $\left|xL(\psi)(x)-xL(P_k)(x)\right|=x\left|L(\psi-P_k)(x)\right|$.
Comme $-\|\psi-P_k\|_\infty e_0 \leqslant \psi-P_k \leqslant \|\psi-P_k\|_\infty e_0$, on a $-\|\psi-P_k\|_\infty L(e_0)\leqslant L(\psi-P_k)\leqslant \|\psi-P_k\|_\infty L(e_0)$ en utilisant 16.
Ainsi $\left|xL(\psi)(x)-xL(P_k)(x)\right|\leqslant \|\psi-P_k\|_\infty xL(e_0)(x)$
La fonction $x\mapsto xL(e_0)(x)$ est continue sur $]0,1]$ et admet comme limite ℓ en 0, donc $x\mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$ et le théorème des bornes atteintes nous fournit un majorant $M>0$.
Donc $\forall x\in]0,1]$, $\left|xL(\psi)(x)-xL(P_k)(x)\right|\leqslant M\|\psi-P_k\|_\infty$ or $M\|\psi-P_k\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
Il s'en suit que la suite de fonction $(x\mapsto xL(P_k)(x))_{k\geqslant 0}$ converge uniformément sur $]0,1]$ vers $x\mapsto xL(\psi)(x)$.
En notant $\delta_k=\lim\limits_{x\to 0} xL(P_k)(x)=\Delta(P_k)$, le théorème de la double limite nous donne alors que la suite (δ_k) converge vers un certain $L\in\mathbb{R}$ et $xL(\psi)(x)\xrightarrow[x\to 0]{} L$.

Ainsi $\psi\in E_1$. On en déduit que $\boxed{E_0\subset E_1.}$

La fonction : $\psi\in E_0\mapsto \ell\displaystyle\int_0^1\psi$ est une forme linéaire continue de $(E_0,\|\ \|_\infty)$ car $\forall\psi\in E_0$, $\left|\ell\displaystyle\int_0^1\psi\right|\leqslant \ell\|\psi\|_\infty$

Les applications Δ et $\psi\mapsto\ell\displaystyle\int_0^1\psi$ sont continues sur E et coïncident sur la partie des dense des fonctions polynomiales donc $\boxed{\text{pour tout } \psi\in E_0, \text{ on a } \Delta(\psi)=\ell\displaystyle\int_0^1\psi.}$

19. La fonction g_- est continue en tous points de $[0,1]\setminus\{a-\varepsilon,a\}$
De plus $\lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g(x)=g(a-\varepsilon)=1$ de même en a

Donc g_- et g_+ (analogue) sont continues sur $[0,1]$ ainsi $\boxed{g_- \text{ et } g_+\in E_0}$

On a

- $\Delta(g_-)=\ell\displaystyle\int_0^1 g_-=\ell\left(\int_0^{a-\varepsilon}g_-+\int_{a-\varepsilon}^a g_-+\int_a^1 g_-\right)$
- $\displaystyle\int_0^{a-\varepsilon}g_-=a-\varepsilon$ et $\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^a g_-=\frac{\varepsilon\cdot 1}{2}$ (aire d'un triangle)
- $\displaystyle\int_a^1 g_-=0$
- $\Delta(g_+)=\ell\left(\displaystyle\int_0^a g_++\int_a^{a+\varepsilon}g_++\int_{a+\varepsilon}^1 g_+\right)$
- $\displaystyle\int_0^a g_+=a$ et $\displaystyle\int_a^{a+\varepsilon}g_+=\frac{\varepsilon\cdot 1}{2}$ et $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^1 g_+=0$

donc $\boxed{\Delta(g_-)=\ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ et } \Delta(g_+)=\ell\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$

On a aussi $1_{[0,a]}\in E$ et $g_-\leqslant 1_{[0,a]}\leqslant g_+$ donc pour tout $x>0$, $xL(g_-)(x)\leqslant xL(1_{[0,a]})(x)\leqslant xL(g_+)(x)$.
On a ensuite $xL(g_-)(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ceci nous fournit $\alpha_1>0$ tel que $\forall x\in]0,\alpha_1]$, $xL(g_-)(x)\geqslant \ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\ell\frac{\varepsilon}{2}$
donc $\forall x\in]0,\alpha_1]$, $xL(g_-)(x)\geqslant \ell(a-\varepsilon)$
De même on peut trouver $\alpha_2>0$, on a $\forall x\in]0,\alpha_2]$, $xL(g_+)(x)\leqslant \ell(a+\varepsilon)$.
Alors, en prenant $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, on a $\forall x\in]0,\alpha]$, $\left|xL(1_{[0,a]})(x)-\ell a\right|\leqslant \ell\varepsilon$
On vient de montrer que $xL(1_{[0,a]})(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell a$ car $\ell\varepsilon$ est aussi petit que l'on veut ainsi

$$\boxed{1_{[0,a]}\in E_1 \text{ et } \Delta(1_{[0,a]})=\ell a=\ell\int_0^1 1_{[0,a]}.}$$

Pour $1_{[0,a[}$, les calcul sont identiques ce qui donne : $1_{[0,a[}\in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a[})=\ell a=\ell\int_0^1 1_{[0,a[}$.

Pour $\alpha\in[0,1]$, on note $\delta_\alpha=1_{\{\alpha\}}$. On a donc $\delta_a=1_{[0,a]}-1_{[0,a[}$ ainsi par linéarité $\delta_a\in E_1$ et $\Delta(\delta_a)=0=\ell\int_0^1 \delta_a$.

On remarque que $L(\delta_0): x\mapsto 0$ donc on a encore : $\delta_0\in E_1$ et $\Delta(\delta_0)=0=\ell\int_0^1\delta_0$.

En ce qui concerne $1_{[a,b]}=1_{[0,b]}-1_{[0,a[}$, on a $1_{[a,b]}\in E_1$ et $\Delta(1_{[a,b]})=\ell(b-a)=\ell\int_0^1 1_{[a,b]}$.

C'est analogue pour $1_{]a,b]}$, $1_{]a,b[}$ et $1_{[a,b[}$ et cela reste valable même si $a=0$.
On sait que $E_1\subset E$. Soit maintenant $\psi\in E$.
On peut écrire $\psi=\varphi+\mathbb{E}$ où φ est continue sur $[0,1]$ et $\mathbb{E}$ est une fonction en escalier
On peut écrire $\mathbb{E}=i\in I\ \lambda_i 1_{J_i}$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille finie de réels et $(J_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'intervalles de $[0,1]$ (éventuellement singleton)

Or $\varphi\in E_1$ d'après 18 et les $1_{J_i}\in E_1$ d'après ce qui précède et on a $\Delta(\varphi)=\ell\int_0^1\varphi$ et $\Delta(1_{J_i})=\ell\int_0^1 1_{J_i}$.
Comme Δ est linéaire sur le sous-espace vectoriel E_1, on en déduit $\psi\in E_1$ et

$$\Delta(\psi)=\Delta(\varphi)+i\in I\ \lambda_i\Delta(1_{J_i})=\ell\int_0^1(\varphi+\mathbb{E}).$$

On en déduit que $\boxed{E_1=E \text{ et } \Delta(\psi)=\ell\int_0^1\psi \text{ pour tout } \psi\in E.}$

---

20. On a $(L(\psi))(\frac{1}{N})=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-n/N}\psi(e^{-n/N})=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n e^{-n/N}\psi(e^{-n/N})=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n e^{-n/N}e^{n/N}$ donc $\boxed{(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k}$.

On a $x(L(\psi))(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\Delta(\psi)=\ell\int_0^1\psi=\ell\int_{1/e}^1\psi=\ell(\ln(1)-\ln(1/e))$

Donc par composition de limites, $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k=\ell=\lim_{x\to 0}\left(x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}\right).}$

---

21. En reprenant les notations de la partie **C**. On a $\mathrm{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Comme $A \in S$, $\left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx} \right) = x f_A(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \Phi(A)$.

On peut appliquer donc le résultat précédent à la suite (a_n). Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n)) = \lim_{x \to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx} \right) = \lim_{x \to 0} x f_A(x).$$

$$\boxed{\text{Si } A \in S, \text{ alors } \frac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(A)}$$

Pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} v(n) \mathrm{e}^{-nx}$ converge ayant pour somme $\left(f_{A_1}(x)\right)^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v(n) \geqslant 0$.

De plus, $x \left(f_{A_1}(x)\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\pi}{4}$ d'après 14 et 15. On peut donc appliquer les résultats de cette partie et alors

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}.}$$