DL n° 10 – Sujet Mines-Ponts

Dénombrements de certaines matrices binaires

Soit n un entier $\geqslant 2$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes. On appelle *matrice binaire* de taille n une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 . L'élément d'une telle matrice situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne est dit en position (i,j), où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

On désigne par $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de taille n comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et exactement deux 1 dans chaque colonne. L'exemple suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de $\mathscr{U}_4$.

On note u_n le cardinal de $\mathscr{U}_n$, et on pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

A. Questions préliminaires

1. Exhiber toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$ pour $n = 2$ et 3, et déterminer les valeurs correspondantes de u_n. (Dans le cas $n = 3$, on pourra raisonner sur la position des éléments nuls dans chacune de ces matrices.)

Soit X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2. Si $A \in \mathscr{U}_n$, montrer que X_0 est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

Soit $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{U}_n$ comportant un 1 en position (1,1). On note h_n le cardinal de $\mathscr{H}_n$.

3. Calculer la somme de toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$ en fonction de h_n et de J.

B. Étude du cardinal de $\mathscr{U}_n$

4. Établir la relation $u_n = \dfrac{n}{2} h_n$ pour tout $n \geqslant 2$. (On pourra s'aider des deux questions précédentes.)

Soit $\mathscr{K}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}_n$ comportant un 1 en position $(1,2)$ et un 1 en position (2,1). On note k_n le cardinal de $\mathscr{K}_n$.

5. Pour tout $n \geqslant 2$, établir une relation donnant h_n en fonction de k_n et de $(n-1)^2$.
6. En examinant les possibilités pour le coefficient situé en position $(2,2)$, démontrer la relation $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 4$.

On pose $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Déduire de ce qui précède une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Prouver que $w_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la série de terme général w_n diverge. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

   On pose $W(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

9. Donner une équation différentielle vérifiée par W et en déduire une expression de $W(x)$ en fonction de x.

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

Cette partie permet d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$. Soit α un réel et β un réel > 0. On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1,1[$ par la formule $\phi(x) = \dfrac{e^{\alpha x}}{(1-x)^{\beta}}$.

On note $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$ la fonction Gamma définie pour tout réel $t > 0$; on rappelle que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$.

10. Montrer que $\phi(x)$ est la somme d'une série entière $\sum \phi_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.
11. Montrer que si $x \in]-1,1[$, on peut écrire $\dfrac{1}{(1-x)^{\beta}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où l'on exprimera les coefficients a_n en fonction de $n!, \Gamma(\beta)$ et $\Gamma(n+\beta)$.
12. En déduire que $\phi_n = \dfrac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où l'on a posé $\psi_n = \displaystyle\int_0^{\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n\, du$.
13. On fixe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > |\alpha|$. A l'aide des variations de la fonction $u \mapsto e^{-u}(\alpha+u)^n$ définie pour tout $u \geqslant -\alpha$, montrer que $\left|\displaystyle\int_0^{a} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n\, du\right|$ est négligeable devant $\displaystyle\int_a^{\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n\, du$ quand $n \to +\infty$.
14. En déduire qu'il existe $a > |\alpha|$ tel que ψ_n soit équivalent à l'intégrale $\displaystyle\int_a^{\infty} e^{-u} (\alpha+u)^{n+\beta-1}\, du$ quand $n \to +\infty$.
15. En conclure que les suites ψ_n et $e^{\alpha}\Gamma(n+\beta)$ sont équivalentes.

On revient sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

16. Établir un équivalent de ϕ_n, puis de u_n quand $n \to +\infty$.
    On prendra soin de simplifier l'équivalent trouvé de u_n en utilisant la formule de Stirling.

D. Étude de rang

Dans cette partie, on cherche à déterminer le rang r_n du système constitué des u_n matrices de $\mathscr{U}_n$ considérées comme des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que X_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous le cœfficients sont égaux à 1, et que J est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont égaux à 1.

17. Calculer r_n pour $n = 2$ et 3. (Dans le cas $n = 3$, on pourra considérer les matrices $J - A$, où $A \in \mathscr{U}_3$.)

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{V}_n$ des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que X_0 soit à la fois vecteur propre pour A et pour sa transposée $A^{\intercal}$.

18. Montrer que $\mathscr{U}_n \subset V_n$ et comparer les valeurs propres de A et de $A^{\intercal}$ associées à X_0 lorsque $A \in \mathscr{V}_n$.
19. Déterminer la dimension de $\mathscr{V}_n$. (On pourra considérer une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ dont un des vecteurs est colinéaire à X_0 et utiliser librement qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormales vérifie $P^{-1} = P^{\intercal}$.) En déduire une majoration sur r_n.

Pour $n \geqslant 3$, soit A une matrice de $\mathscr{U}_n$ comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,2)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$.

20. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathscr{U}_n$ telle que $A - B$ ne comporte que des éléments nuls, *sauf* en positions (i,j) pour $i \leqslant 2$ et $j \leqslant 2$. En déduire que si r'_n désigne le rang du système constitué de toutes les matrices $U - V$ où $U, V \in \mathscr{U}_n$, on a $r'_n \geqslant (n-1)^2$.
21. Conclure.

FIN DE L'ÉNONCÉ