DL 10 : Sujet E3A

Exercice 1.

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, C(x)\,\mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.
Soit $A \in E_n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ième colonne de la matrice A.
Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad B_j = S - A_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} A_k \quad \text{où} \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Dans cette question $n = 2$ et E_2 est muni de la base : $\mathscr{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$
où $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

1.2 Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.

1.3 Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

On revient au cas général et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a :

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A)$$

4.

4.1 Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.

Montrer que les valeurs propres de u sont racines de ce polynôme. On admet qu'il est diagonalisable.

4.2 En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u.

5. Soient J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

5.1 Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.

5.2 Retrouver alors le résultat de la question **4.1**.

Exercice 3.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathscr{P})$ suivant :

$$(f \text{ est continue sur } \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t \quad : (E_1)\right)$$

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1.1 Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1.2 Montrer que si f vérifie (E_1), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$(\mathscr{P}_1) \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + x\, f(x) + 2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

3. En déduire que f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$(\mathscr{P}_2) \quad \begin{cases} F \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x) + x\, F'(x) + 2\, F(x) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H''(x) + x\, H'(x) + 2\, H(x) = 0 \\ H'(0) = 1 \quad \text{et} \quad H(0) = 0 \end{cases}$$

4.1 Prouver que l'on a : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$.

4.2 En déduire une expression de $H(x)$ pour tout x réel à l'aide de fonctions usuelles.

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions du problème $(\mathscr{P})$.

FIN DE L'ÉPREUVE