

Programme de colle – MPI

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times) .

Familles sommables (MP2I)

Extrait du programme officiel :

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0, +\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps. On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

Contenus

Capacités & commentaires

Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.
Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .

La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathbb{R}^+ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Opérations : somme, multiplication par un réel positif.
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$.

Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.

Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i \in I}$ de \mathbb{C}^I est dite sommable si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_{i'})_{i' \in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{i' \in I'} b_{i'}.$$

La somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de \mathbb{R}^+ diverge.

Invariance de la somme par permutation.

On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.

La démonstration est hors programme.

Notation $\ell^1(I)$.

Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries.

Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.

Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, il existe une partie finie F de I telle que $\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \varepsilon$.

Invariance de la somme par permutation.

La démonstration est hors programme.

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Le programme de MPI sur le chapitre *Ensembles dénombrables* ajoute : « Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable. ».

Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;
- introduire la notion de fonction développable en série entière ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus

Capacités & commentaires

a) Généralités

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Disque ouvert de convergence.

Intervalle ouvert de convergence.

Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geq R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
Rayon de convergence de $\sum n^a x^n$.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être utilisée directement.

b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème d'Abel radial :

si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si

$$\sum a_n R^n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

La somme d'une série entière est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

La démonstration est hors programme.

$$\text{Relation } R \left(\sum a_n x^n \right) = R \left(\sum n a_n x^n \right).$$

Contenus

Capacités & Commentaires

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

d) Fonctions développables en série entière, développements usuels

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , sur l'intervalle $]-R, R[$. Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Développements usuels dans le domaine réel.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan , $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^a$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Semaine prochaine : Espaces vectoriels normés.

Questions de cours

- (i) (Groupes *) Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence.
- (ii) Classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et expression des dérivées.
- (iii) Liste des développements en série entière des fonctions usuelles au programme.
- (iv) Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^a$ à l'aide d'une équation différentielle.
- (v) **CCINP 2** : On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.
 - 1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
 - 2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
 - 3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- (vi) **CCINP 18** : On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.
 - 1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
 - 2. a) La fonction S est-elle continue sur D ?
b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

(vii) **CCINP 20** :

- 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
- 2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
(a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$. (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$. (c) $\sum \cos(n) z^n$.

(viii) **CCINP 21** :

- 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
- 2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
- 3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

(ix) **Fin de semaine seulement – CCINP 22** :

- 1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
- 2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

(x) **CCINP 23** : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

- 1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
On le note R .
- 2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]-R, R[$.

(xi) **Fin de semaine seulement – CCINP 24** :

- 1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
- 2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
- 3. (a) Déterminer $S(x)$.
(b) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(0) = 1, f(x) = \text{ch} \sqrt{x} \text{ si } x > 0, f(x) = \cos \sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(xii) **Fin de semaine seulement – CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

- 1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de \mathbb{R} , avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
- 2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

(xiii) **CCINP 47** : Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

(xiv) **CCINP 51** :

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{Arcsin } x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.