20
Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Propriété 1 : d'une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(i) $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$

(ii) $\|-x\| = \|x\|$

(iii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

Définition 3 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$\mathrm{d} : \begin{array}{|ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$$

Propriété 2 : d'une distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(i) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) ***Symétrie*** : $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) ***Double inégalité triangulaire*** :

$$\big|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)\big| \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y).$$

Définition 4 : distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $x \in E$.

On appelle **distance de x à A** le réel $\mathrm{d}(x, A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(x,a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ qui est bien défini.

Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie

$\begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,A) \end{array}$ *est 1-lipschitzienne sur E dans le sens où*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\big| \leqslant \|x - y\|.$$

C'est en particulier le cas de $x \mapsto \mathrm{d}(x,a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 5 : Produit scalaire

Un **produit scalaire** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique défini-positive sur E c'est-à-dire telle que

- Pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x|y) \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \mapsto (x|y)$ et $y \mapsto (x|y)$ sont linéaires.
- Pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x|y) = (y|x)$
- Pour tout $x \in E$, $(x|x) \geqslant 0$ et $(x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

On dit alors que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur x de E, on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Propriété 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.
Alors

$$\forall\, x, y \in E, \quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y),$$

ou encore,

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|(x|y)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y = 0$ ou $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y$)

Propriété 5 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

3 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition 7 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$

Propriété 6 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

b Sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathbb{K})$

Propriété 7 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$, encore noté $L^\infty(X, \mathbb{K})$ (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 8 : Norme infini

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Propriété 8 : Rappel

Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Propriété 9 : La norme infini en est une

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

c Sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$

Définition 9 : Normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 = N_1(f) = \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x$$

$$\|f\|_2 = N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Propriété 10 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$.

4 Boules et sphères

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 10 : Boule et sphères

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| < r\}.$$

Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$B'(a,r) = B_f(a,r) = \overline{B}(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| \leqslant r\}.$$

Sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| = r\}.$$

Définition 11 : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$.

Propriété 11 : Convexité des boules

Les boules sont convexes.

5 Parties, suites et fonctions bornées

Définition 12 : Partie bornée

$A \in \mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$.

Propriété 12 : Les boules sont bornées

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Définition 13 : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f \in E^X$.

On dit que f est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de E.)

On note $L^\infty(X,E) = \mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées (notations hors-programme).

Propriété 13 : Norme infini

On pose, pour $f \in \mathscr{B}(X,E)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$, bien défini.

Alors $(\mathscr{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$:

Définition 14 : Suite bornée

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)

On note $\ell^\infty(E) = \mathscr{B}(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E (notation hors-programme).

6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété 14

Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On pose, pour $x = (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$,

$$N(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} N_k(x_k).$$

*Alors N est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ appelée **norme produit**.*

II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition 15 : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.

Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Définition 16 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.

Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.

Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.

Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

Propriété 15 : Unicité de la limite

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Propriété 16 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.

Propriété 17 : Convergence de la norme des termes

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Propriété 18 : Convergence par majoration

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Définition 17 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de u.

Propriété 19 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

2 Opérations algébriques

Propriété 20 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété 21 : Produit externe de suites convergentes

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha\ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété 22 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in (E_1 \times \cdots \times E_p)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.

Alors $u \xrightarrow{N} \ell$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$.

III Comparaison de normes

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E.

1 Domination

Définition 18 : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.

Propriété 23 : Implication de convergences

Soit N_1 dominée par N_2 et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

Méthode 1 : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$ ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$ ou encore tel que $\dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \longrightarrow +\infty$.

2 Équivalence

a Définition

Définition 19 : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

Propriété 24 : Équivalence de convergence

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{K}^n$

Propriété 25 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

c Cas de $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$

Propriété 26 : Domination des normes

Sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$,
- *$N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_1.*
- *$N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_2.*
- *$N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ et N_2 n'est pas dominée par N_1.*

d Cas de la dimension finie

Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

Non exigible, admis provisoirement. ∎

Propriété 27 : Convergence coordonnée à coordonnée

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV Topologie des espaces vectoriels normés

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

1 Voisinages, ouverts, fermés

a Voisinage

Définition 20 : Voisinage

Soient $a \in E$ et V une partie de E.

On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans V.

Propriété 28 : des voisinages

(i) Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors W est un voisinage de a.

(ii) Une réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.

*(iii) Une intersection **finie** de voisinages de a est un voisinage de a.*

Propriété 29 : Voisinages et domination de norme

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2.

Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

b Parties ouvertes

Définition 21 : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tous ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O}, \ \exists r > 0, \ \ B(a,r) \subset \mathcal{O}$.

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Propriété 30 : Cas des boules ouvertes

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Propriété 31 : des ouverts

(i) $\varnothing$, E sont ouverts.

(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.

*(iii) Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.*

*(iv) Un produit **fini** d'ouverts est ouvert (pour la norme produit).*

Propriété 32 : Ouverts et domination de normes

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour N_1 sont des ouverts pour N_2.

Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

c Parties fermées

Définition 22 : Fermé

Une partie F de E est dite fermée lorsque son complémentaire F^c est ouvert.

Propriété 33 : Cas des boules fermées

Toute boule fermée est fermée (!)

Propriété 34 : des fermés

(i) $\varnothing$, E sont fermés.

(ii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.

*(iii) Une réunion**finie** de fermés est fermée.*

*(iv) Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).*

Propriété 35 : Cas des sphères

Toute sphère de E est fermée.

Propriété 36 : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

2 Adhérence, densité, intérieur

a Points adhérents, adhérence

Définition 23 : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque $\forall r > 0, \ \ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Propriété 37 : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Définition 24 : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Propriété 38 : Croissance

Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Propriété 39 : Caractérisation

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Propriété 40 : Caractérisation des fermés

F est un fermé de E si et seulement si $\overline{F} = F$.

Propriété 41 : Cas des sous-espaces

Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ l'est aussi.

b Densité

Définition 25 : Densité

D est **dense** dans E lorsque $\overline{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre D.

Propriété 42 : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'élément de D.

c Intérieur

Définition 26 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E, $x \in E$.

x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété 43 : Croissance

Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Propriété 44 : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Propriété 45 : Caractérisation des ouverts

$\mathcal{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

d Frontière

Définition 27 : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Propriété 46 : Caractère fermé

Une frontière est toujours fermée.

3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

a Voisinage relatif

Définition 28 : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de a dans A** toute partie V' de A s'écrivant $V' = A \cap V$ où V est un voisinage de a, c'est-à-dire telle qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A \subset V'$.

b Ouverts relatifs

Définition 29 : Ouvert relatif

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de** A (ou **pour la topologie induite sur** A) lorsqu'elle est un voisinage relatif de chacun de ses points.

Propriété 47 : Caractérisation

$\mathcal{O}'$ de A est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

c Fermés relatifs

Définition 30 : Fermé relatif

Une partie F' de A est un fermé **relatif de** A si son complémentaire **dans A** est un ouvert relatif de A.

Propriété 48 : Caractérisation

F' est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe un fermé F tel que $F' = F \cap A$.

Propriété 49 : Caractérisation séquentielle

Soit F' une partie de A.

*F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant **dans** A a sa limite dans F'.*

d Densité

Définition 31 : Densité dans une partie

Soit B partie de A. B est **dense dans** A si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.