Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité :

Homogénéité :

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) :

On dit alors que le couple (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Remarque

R 1 – Souvent notée $\|\cdot\|$ également.

R 2 – Pas de cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Exemple

E 1 – Sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Propriété 1 : d'une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(i) $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$

(ii) $\|-x\| = \|x\|$

(iii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

Remarque

R 3 – Si $x \neq 0_E$, est le vecteur normé associé à x (de même direction et de même sens.)

Définition 3 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$\mathrm{d} : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$$

Propriété 2 : d'une distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(i) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) ***Symétrie*** : $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) ***Double inégalité triangulaire*** :

Remarque

R 4 – Il existe une notion plus générale (Hors Programme) de distance sur un ensemble E : c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ symétrique, telle que $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ et vérifiant l'inégalité triangulaire $\mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$. On dit alors que (E, d) est un **espace métrique**.
C'est bien le cas de la distance associée à une norme.

Définition 4 : distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $x \in E$.
On appelle **distance de x à A** le réel

Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie

$$\begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,A) \end{array}$$ *est 1-lipschitzienne sur* E *dans le sens où*

C'est en particulier le cas de $x \mapsto \mathrm{d}(x,a)$ *où* $a \in E$ *avec* $A = \{a\}$.

2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 5 : Produit scalaire

Un **produit scalaire** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique définie-positive sur E c'est-à-dire telle que

-
-
-
-

On dit alors que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur x de E, on pose

$$\|x\| =$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Propriété 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ *un espace préhilbertien réel. Alors*

ou encore,

avec égalité si et seulement si

Propriété 5 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

3 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition 7 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

Remarque

R5 – On rappelle que $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|(x|y)| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$ soit encore

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si (x, y) liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans notre programme.

Propriété 6 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque

R6 – On peut montrer que plus généralement, si $p \geqslant 1$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et même que $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$ (cf TD) d'où la notation.

R 7 – Plus généralement, sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, on décompose un vecteur $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et on pose

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|,$$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty=\max_{k\in[\![1,n]\!]}|x_k|$$

qui définissent des normes sur E.

Exemple

E 2 – Sur $\mathbb{K}_n[X]$, en posant $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

E 3 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})=L^\infty(X,\mathbb{K})$

Propriété 7 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, encore noté $L^\infty(X,\mathbb{K})$ (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

R 8 – C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition 8 : Norme infini

On définit, pour $f\in E=\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty=N_\infty(f)=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

Remarque

R 9 – Bien défini que $\operatorname{Im} f=\{|f(x)|,\ x\in X\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

Propriété 8 : Rappel

Si $\lambda\in\mathbb{R}^+$ et A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors

$$\sup(\lambda A)=\lambda\sup A$$

Propriété 9 : La norme infini en est une

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Définition 9 : Normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

On définit, pour $f\in E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

Remarque

R 10 – Pour $f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, on a même $\|f\|_\infty=\max_{[a,b]}|f|$.

R 11 – On rappelle que $\|\cdot\|_2$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ est la norme associée au produit scalaire canonique

$$(f|g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f,g\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$|(f|g)|\leqslant\|f\|_2\|g\|_2$$

soit encore

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

avec égalité si et seulement si (f,g) liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ dans notre programme.

Propriété 10 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

4 Boules et sphères

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 10 : Boule et sphères

Soient $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}^+$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r :

Boule fermée de centre a et de rayon r :

Sphère de centre a et de rayon r :

Exemple

E 4 – Cas où $r=0$.

E 5 – Cas de $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

E 6 – Boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.

Définition 11 : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x,y\in E$ et pour tout $t\in[0,1]$,

Remarque

R 12 – $\{tx+(1-t)y,\ t\in[0,1]\}$ représente le segment formé par les extrémités des vecteurs x et y.

Propriété 11 : Convexité des boules

Les boules sont convexes.

5 Parties, suites et fonctions bornées

Définition 12 : Partie bornée

$A\in\mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe

Propriété 12 : Les boules sont bornées

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Remarque

R 13 – Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par exemple fermée).

Définition 13 : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f\in E^X$.

On dit que f est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\in X$, $\|f(x)\|\leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de E.)

On note $L^\infty(X,E)=\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées (notations hors-programme).

Propriété 13 : Norme infini

On pose, pour $f\in\mathscr{B}(X,E)$, $\|f\|_\infty=$ bien défini.

Alors $(\mathscr{B}(X,E),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour $X=\mathbb{N}$:

Définition 14 : Suite bornée

Soit $u\in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|u_n\|\leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)

On note $\ell^\infty(E)=\mathscr{B}(\mathbb{N},E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E (notation hors-programme).

Remarque

R 14 – On peut aussi définir une norme infini sur l'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées :

$$\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|$$

6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété 14

Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On pose, pour $x=(x_1,\dots,x_p)\in E_1\times\cdots\times E_p$,

$$N(x)=$$

*Alors N est une norme sur $E_1\times\cdots\times E_p$ appelée **norme produit**.*

Remarque

R 15 – En prenant $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$, la norme produit sur $\mathbb{K}^n$ est

II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition 15 : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.

Autrement dit,

Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.

Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Remarque

R 16 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

R 17 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in$$

R 18 – La convergence dépend a priori de la norme.

Définition 16 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.

Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.

Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.

Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

Propriété 15 : Unicité de la limite

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Propriété 16 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.

Propriété 17 : Convergence de la norme des termes

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Propriété 18 : Convergence par majoration

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Définition 17 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de u.

Propriété 19 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Remarque

R 19 – Réciproque fausse.

Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

2 Opérations algébriques

Propriété 20 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété 21 : Produit externe de suites convergentes

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété 22 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in \left(E_1 \times \cdots \times E_p\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.

Alors $u \xrightarrow{N} \ell$ si et seulement si

III Comparaison de normes

Soit $(E,+,\times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. On note $B_1(a,r)$ (respectivement $B_2(a,r)$) une boule ouverte pour N_1 (respectivement N_2).

1 Domination

Définition 18 : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsque

Remarque

R 20 – Traduction avec les boules :

R 21 – Si une partie ou une fonction ou une suite est bornée pour N_2, elle l'est automatiquement pour N_1 aussi.

Propriété 23 : Implication de convergences

Soit N_1 dominée par N_2 et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

Remarque

R 22 – Si N_1 n'est pas dominée par N_2, on fabrique une suite qui tend vers 0 pour N_2 et diverge pour N_1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in E$ tel que $N_1(x_n) > nN_2(x_n)$. Il suffit alors de poser $z_n =$

Méthode 1 : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$ ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$ ou encore tel que $\dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \longrightarrow +\infty$.

2 Équivalence

a Définition

Définition 19 : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement si

Remarque

R 23 – C'est une relation d'équivalence.

Propriété 24 : Équivalence de convergence

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{K}^n$

Propriété 25 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

c Cas de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Propriété 26 : Domination des normes

Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

d Cas de la dimension finie

Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

Non exigible, admis provisoirement. ■

Propriété 27 : Convergence coordonnée à coordonnée

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

1 Voisinages, ouverts, fermés

a Voisinage

Définition 20 : Voisinage

Soient $a \in E$ et V une partie de E.
On dit que V est un **voisinage** de a

Remarque

R 24 – Cela revient à dire qu'on a une distance de sécurité autour de a qui permet de s'en approcher dans toutes les directions en restant dans V.
En particulier, $a \in V$.

Propriété 28 : des voisinages

(i) *Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors*

(ii) *Une réunion*

(iii) *Une intersection*

Remarque

R 25 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$

Propriété 29 : Voisinages et domination de norme

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour sont des voisinages pour
Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

b Parties ouvertes

Définition 21 : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Remarque

R 26 – Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de point « au bord ».

Exemple

E 7 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 8 – Le quart de plan $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est-il un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?

E 9 – Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, alors $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriété 30 : Cas des boules ouvertes

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Propriété 31 : des ouverts

(i) *$\varnothing$, E sont ouverts.*

(ii) *Une réunion*

(iii) *Une intersection*

(iv) *Un produit **fini** d'ouverts est ouvert (pour la norme produit).*

Remarque

R 27 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies, avec le même contre-exemple que pour les voisinages.
Dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$

Propriété 32 : Ouverts et domination de normes

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour sont des ouverts pour
Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

Remarque

R 28 – On appelle topologie de $(E, \|\cdot\|)$ l'ensemble de ses ouverts.
Si N_1 est dominée par N_2, la topologie pour N_2 possède plus d'ouverts que celle pour N_1. On dit que la topologie pour N_2 est **plus fine** que celle pour N_1.

R 29 – En particulier, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Les notions de voisinages et donc d'ouverts ne dépendant pas du choix de la norme. Ce sera aussi le cas de toutes les notions définies ci-après : fermé, adhérence, intérieur, densité.

Exercice 1 : CCINP 37

C Parties fermées

Définition 22 : Fermé

Une partie F de E est dite fermée lorsque

Remarque

R 30 – Intuitivement : bord compris.

R 31 – ⚠ Fermé n'est pas le contraire d'ouvert. On peut être les deux à la fois. Le plus souvent, on n'est ni l'un ni l'autre...

Propriété 33 : Cas des boules fermées

Toute boule fermée est fermée (!)

Remarque

R 32 – Les singletons sont des fermés.

Propriété 34 : des fermés

(i) *$\varnothing$, E sont fermés.*

(ii) *Une intersection*

(iii) *Une réunion*

(iv) *Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).*

Remarque

R 33 – C'était l'inverse pour les ouverts.

R 34 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des réunions infinies.
Dans $\mathbb{R}$, les $F_i = \left[-1+\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right]$

R 35 – Une partie finie est fermée.

Exemple

E 10 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 11 – Si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, alors $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $[a, b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Propriété 35 : Cas des sphères

Toute sphère de E est fermée.

Propriété 36 : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si

Exemple

E 12 – $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2\leqslant y\leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : CCINP 41

2 Adhérence, densité, intérieur

a Points adhérents, adhérence

Remarque

R 36 – Intuitivement, un point adhérent est un point dans A ou « au bord » de A.

Définition 23 : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x\in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque

Propriété 37 : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement si

Définition 24 : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque

R 37 – Ne pas confondre avec le complémentaire.

R 38 – Intuitivement, « les points de A et les points des bords ».

Exemple

E 13 –

E	A	$\overline{A}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	
$\mathbb{R}$	$]0,1]$	
E	$B(a,r)$	

Propriété 38 : Croissance

Propriété 39 : Caractérisation

Propriété 40 : Caractérisation des fermés

Propriété 41 : Cas des sous-espaces

Exercice 3 : CCINP 34

Exercice 4 : CCINP 44

Exercice 5 : CCINP 45

b Densité

Définition 25 : Densité

D est **dense** dans E lorsque

Propriété 42 : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si

Exemple

E 14 – $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

E 15 – Quels théorèmes déjà rencontrés sont des résultats de densité ?

c Intérieur

Définition 26 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E, $x \in E$.
x est un **point intérieur** à A lorsque

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété 43 : Croissance

Propriété 44 : Caractérisation

Propriété 45 : Caractérisation des ouverts

Exemple

E 16 – $\mathring{\mathbb{Q}} =$

E 17 – $\overset{\circ}{\widehat{B'(a,r)}} =$

d Frontière

Définition 27 : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble

Exemple

E 18 – $\mathrm{Fr}(B(a,r)) =$

E 19 – $\mathrm{Fr}([0,1[)$

E 20 – $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) =$

Propriété 46 : Caractère fermé

Une frontière est toujours fermée.

3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

a Voisinage relatif

Définition 28 : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de a dans A** toute partie V' de A s'écrivant

Remarque

R 39 – V' n'est pas nécessairement un voisinage de a dans E.
Par exemple $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un voisinage de 0 dans $[0,1[$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

b Ouverts relatifs

Définition 29 : Ouvert relatif

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de A** (ou **pour la topologie induite sur A**) lorsqu'

Remarque

R 40 – $\mathcal{O}'$ ouvert relatif de A si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{O}'$,

Propriété 47 : Caractérisation

$\mathcal{O}'$ de A est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe

Exemple

E 21 – $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert de $[0,1]$.

Remarque

R 41 – Si A est ouvert, les ouverts relatifs de A sont les ouverts.

c Fermés relatifs

Définition 30 : Fermé relatif

Une partie F' de A est un fermé **relatif de A** si

Propriété 48 : Caractérisation

F' est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe

Remarque

R 42 – Si A est fermé, les fermés relatifs de A sont les fermés.

Propriété 49 : Caractérisation séquentielle

Soit F' une partie de A.
F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que

d Densité

Définition 31 : Densité dans une partie

Soit B partie de A. B est **dense dans** A si et seulement si