

# Espaces Vectoriels Normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## CONTENUS

## CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.

Vecteurs unitaires.

Distance associée à une norme.

Inégalité triangulaire.

Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.

On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.

Parties, suites, fonctions bornées.

Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.

Normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ .

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Notation  $\|\cdot\|_\infty$ .

Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité  $\sup(kA) = k \sup(A)$  pour  $A$  partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}^+$ .

Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.

Notations  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .

Produit fini d'espaces vectoriels normés.

### b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

### c) Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.

Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

### d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.

Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.

Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.

Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.

Point intérieur, point adhérent.

Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.



## CONTENUS

Si  $A$  est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de  $A$ . Voisinage relatif.

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

Par définition, une partie  $U$  de  $A$  est un ouvert relatif si  $U$  est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec  $A$  d'un ouvert de  $E$ . Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans  $A$  des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec  $A$  d'un fermé de  $E$ .

---

**j) Espaces vectoriels normés de dimension finie**

---

Équivalence des normes en dimension finie.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

La démonstration n'est pas exigible.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

---

# Table des matières

<b>20</b>	<b>Espaces Vectoriels Normés</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Norme sur un espace vectoriel</b>	<b>4</b>
1	Norme et distance	4
2	Norme associée à un produit scalaire	6
3	Normes usuelles	7
a	Sur $\mathbb{K}^n$	7
b	Sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathbb{K})$	8
c	Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$	9
4	Boules et sphères	11
5	Parties, suites et fonctions bornées	11
6	Produit fini d'espaces vectoriels normés	12
<b>II</b>	<b>Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé</b>	<b>13</b>
1	Convergence d'une suite	13
2	Opérations algébriques	14
3	Suite à valeurs dans un produit	15
<b>III</b>	<b>Comparaison de normes</b>	<b>15</b>
1	Domination	15
2	Équivalence	16
a	Définition	16
b	Cas de $\mathbb{K}^n$	16
c	Cas de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$	16
d	Cas de la dimension finie	17
<b>IV</b>	<b>Topologie des espaces vectoriels normés</b>	<b>18</b>
1	Voisinages, ouverts, fermés	18
a	Voisinage	18
b	Parties ouvertes	19
c	Parties fermées	21
2	Adhérence, densité, intérieur	24
a	Points adhérents, adhérence	24
b	Densité	28
c	Intérieur	28
d	Frontière	29
3	Ouverts, fermés, voisinages relatifs	29
a	Voisinage relatif	29
b	Ouverts relatifs	29
c	Fermés relatifs	30
d	Densité	30



Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## **1** NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### **1** Norme et distance

#### Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

**Défini-positivité** : Pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) \geq 0$  et  $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E$ .

**Homogénéité** : Pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ .

**Inégalité triangulaire (ou sous-additivité)** : Pour tout  $x, y \in E$ ,  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

On dit alors que le couple  $(E, N)$  est un **espace vectoriel normé**.

#### Remarque

R1 – Souvent notée  $\|\cdot\|$  également.

R2 – Pas de cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

#### Exemple

E1 – Valeur absolue sur  $\mathbb{R}$  (y en a-t-il d'autres ?) et module sur  $\mathbb{C}$ .

#### Propriété 1 : d'une norme

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $x, y \in E$ .

$$(i) \quad \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$$

$$(ii) \quad \|-x\| = \|x\|$$

$$(iii) \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

#### Démonstration

(i) Il suffit de prendre  $\lambda = 0$  dans l'homogénéité.

(ii) C'est encore l'homogénéité.

(iii) On a déjà  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  puis  $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$  avec la propriété précédente, puis  $\|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$  donne  $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$  puis par symétrie des rôles  $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$  ce qui donne bien  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$ . Enfin, on tire  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  de la propriété précédente. ■

#### Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 1$ .

#### Remarque

R3 – Si  $x \neq 0_E$ ,  $\frac{1}{\|x\|}x$  est le vecteur normé associé à  $x$  (de même direction et de même sens.)

**Définition 3 : Distance associée à une norme**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à  $\|\cdot\|$  l'application

$$d : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$$

**Propriété 2 : d'une distance**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $d$  distance associée,  $x, y, z \in E$ .

(i)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .

(iii) **Double inégalité triangulaire :**

(ii) **Symétrie :**  $d(x, y) = d(y, x)$ .

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

**Démonstration**

(i) Facile.

(ii) Facile.

(iii)  $d(x, y) = \|x - z + z - y\| \leq d(x, z) + d(z, y)$   $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  donc  $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$  d'où on tire par symétrie  $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ . ■

**Remarque**

**R4** – Il existe une notion plus générale (Hors Programme) de distance sur un ensemble  $E$  : c'est une application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}^+$  symétrique, telle que  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  et vérifiant l'inégalité triangulaire  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . On dit alors que  $(E, d)$  est un **espace métrique**. C'est bien le cas de la distance associée à une norme.

**Définition 4 : distance à une partie**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $A$  une partie non vide de  $E$ ,  $x \in E$ .

On appelle **distance de  $x$  à  $A$**  le réel  $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$  qui est bien défini.

**Démonstration**

$\{\|x - a\|, a \in A\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  (car  $A$  non vide) minorée par 0. ■

**Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie**

$$\begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto d(x, A) \end{cases} \text{ est 1-lipschitzienne sur } E \text{ dans le sens où}$$

$$\forall x, y \in E, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

C'est en particulier le cas de  $x \mapsto d(x, a)$  où  $a \in E$  avec  $A = \{a\}$ .

**Démonstration**

Si  $a \in A$ , par inégalité triangulaire,  $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$  donc pour tout  $a \in A$ ,  $d(y, a) \geq d(x, A) - d(x, y)$  qui ne dépend pas de  $a$  donc qui est un minorant de  $\{d(y, a), a \in A\}$ , donc par définition de la borne inférieure,  $d(y, A) \geq d(x, A) - d(x, y)$ , ce qui donne  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ , par symétrie on a aussi  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$  et donc  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ . ■



## 2 Norme associée à un produit scalaire

### Définition 5 : Produit scalaire

Un **produit scalaire** sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  est une forme bilinéaire symétrique défini-positive sur  $E$  c'est-à-dire telle que

- Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x|y) \in \mathbb{R}$ .
- Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x \mapsto (x|y)$  et  $y \mapsto (x|y)$  sont linéaires.
- Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x|y) = (y|x)$
- Pour tout  $x \in E$ ,  $(x|x) \geq 0$  et  $(x|x) = 0 \implies x = 0_E$ .

On dit alors que  $(E, (\cdot|\cdot))$  est un **espace préhilbertien réel**.

### Définition 6 : Norme euclidienne

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'application  $\|\cdot\|$  est appelée **norme euclidienne** sur  $E$  associée au produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$ .

### Propriété 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel.

Alors

$$\forall x, y \in E, (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y),$$

ou encore,

$$\forall x, y \in E, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont liés (i.e.  $y = 0$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$ )

### Propriété 5 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur  $E$ .

### Démonstration

Soient  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geq 0$
- $\|x\| = 0 \implies \|x\|^2 = 0 \implies (x|x) = 0 \implies x = 0_E$
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x|x)} = |\lambda| \|x\|$
- Inégalité triangulaire : Soient  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $E$ . Il est plus pratique de travailler avec le carré des normes :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \\ &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

### 3 Normes usuelles

#### a Sur $\mathbb{K}^n$

#### Définition 7 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|. \end{aligned}$$

#### Remarque

R5 – On rappelle que  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{R}^n$  est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|(x|y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$  soit encore

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si  $(x, y)$  liée.

Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  dans notre programme.

#### Propriété 6 : Ce sont des normes

*Il s'agit de normes sur  $\mathbb{K}^n$ .*

#### Démonstration

##### Cas de $\|\cdot\|_1$

**défini-positivité** Si  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \in \mathbb{R}^+$  et si  $\|x\|_1 = 0$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k| = 0$  car on somme des termes positifs, donc  $x = 0_{\mathbb{K}^n}$ .

**homogénéité** Pas de difficulté.

**inégalité triangulaire** Si  $x, y \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$ .

##### Cas de $\|\cdot\|_\infty$

**défini-positivité** Si  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| \in \mathbb{R}^+$  et si  $\|x\|_\infty = 0$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k| = 0$  car on prend le maximum de termes positifs, donc  $x = 0_{\mathbb{K}^n}$ .

**homogénéité** Si  $x \in \mathbb{K}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\|\lambda x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|\lambda| |x_k|) = |\lambda| \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty$  car  $|\lambda| \geq 0$ .

**inégalité triangulaire** Si  $x, y \in \mathbb{K}^n$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$  donc en particulier  $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

##### Cas de $\|\cdot\|_2$

**Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**  : Il s'agit de la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.

**Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**  : Pas de produit scalaire au programme pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .



**défini-positivité** Si  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \in \mathbb{R}^+$  et si  $\|x\|_2 = 0$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k|^2 = 0$  car on somme des termes positifs, donc  $x = 0_{\mathbb{K}^n}$ .

**homogénéité** Pas de difficulté.

**inégalité triangulaire** Pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe au programme. On se ramène au cas réel.

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)(\overline{x_k + y_k}) = \sum_{k=1}^n (|x_k|^2 + |y_k|^2 + \overline{x_k}y_k + x_k\overline{y_k}) = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^n \Re(\overline{x_k}y_k)$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\Re(\overline{x_k}y_k) \leq |\overline{x_k}y_k| = |x_k||y_k|$  donc

$$\sum_{k=1}^n \Re(\overline{x_k}y_k) \leq \sum_{k=1}^n |x_k||y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} = \|x\|_2 \|y\|_2$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs réels  $(|x_1|, \dots, |x_n|)$  et  $(|y_1|, \dots, |y_n|)$ .

Finalement,  $\|x + y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$  donc  $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ . ■

**Remarque**

**R6** – On peut montrer que plus généralement, si  $p \geq 1$ ,

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur  $\mathbb{K}^n$  et même que  $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$  (cf TD) d'où la notation.

**R7** – Plus généralement, sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , de base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , on décompose un vecteur  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  et on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|$$

qui définissent des normes sur  $E$ .

**Exemple**

**E2** – Sur  $\mathbb{K}_n[X]$ , on peut définir des normes, pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ,  $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|$ ,  $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2}$  et  $\|P\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |a_k|$ .

**E3** – Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on peut définir des normes  $\|A\|_1 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |a_{i,j}|$ ,  $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |a_{i,j}|^2}$ ,  $\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |a_{i,j}|$ .

**b**

Sur  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathbb{K})$

**Propriété 7 :  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$**

Si  $X$  est un ensemble non vide, l'ensemble  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ , encore noté  $L^\infty(X, \mathbb{K})$  (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.



**Remarque**

**R8** – C'est même une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**Démonstration**

C'est une sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^X$  car une partie de cet espace, non vide (contient toute fonction constante) et si  $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ,  $M_f, M_g \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|f| \leq M_f$  et  $|g| \leq M_g$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors pour tout  $x \in X$ ,  $|f(x) + \lambda g(x)| \leq M_f + |\lambda| M_g$  donc  $f + \lambda g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ . ■

**Définition 8 : Norme infini**

On définit, pour  $f \in E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ,

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**Remarque**

**R9** – Bien défini que  $\text{Im } f = \{|f(x)|, x \in X\}$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 8 : Rappel**

Si  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $A$  une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ , alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

**Propriété 9 : La norme infini en est une**

$\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ .

**Démonstration**

**défini-positivité** Soit  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ .  $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}^+$  et si  $\|f\|_\infty = 0$ , pour tout  $x \in X$ ,  $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$  donc  $f = 0_{\mathbb{K}^X}$ .

**homogénéité** C'est la formule rappelée ci-dessus.

**inégalité triangulaire** Si  $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  et  $x \in X$ ,  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  qui ne dépend pas de  $x$ , donc  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . ■

**C**

Sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

**Définition 9 : Normes usuelles sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$** 

On définit, pour  $f \in E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,

$$\|f\|_1 = N_1(f) = \int_a^b |f| \, dx$$

$$\|f\|_2 = N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

**Remarque**

**R 10** – Pour  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , on a même  $\|f\|_\infty = \max_{[a, b]} |f|$ .

**R 11** – On rappelle que  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  est la norme associée au produit scalaire canonique

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,

$$|(f|g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

soit encore

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt \int_a^b (g(t))^2 dt}$$

avec égalité si et seulement si  $(f, g)$  liée.

Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  dans notre programme.

**Propriété 10 : Ce sont des normes**

*Il s'agit de normes sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .*

**Démonstration**

Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

**Cas de  $\|\cdot\|_1$** 

**défini-positivité** Si  $f \in E$ ,  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \in \mathbb{R}^+$  par positivité de l'intégrale et si  $\|f\|_1 = 0$ , comme  $|f|$  est continue et positive, par positivité améliorée,  $|f|$  donc  $f$  est la fonction nulle sur  $[a, b]$ .

**homogénéité** Pas de difficulté, par linéarité de l'intégrale.

**inégalité triangulaire** Si  $f, g \in E$ ,  $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$  par inégalité triangulaire dans  $\mathbb{K}$  et linéarité de l'intégrale.

**Cas de  $\|\cdot\|_\infty$**  Se déduit directement de ce qui a été vu sur  $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$  car  $E \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ . Notons qu'ici la preuve est un peu plus simple car le sup est atteint : c'est un max.

**Cas de  $\|\cdot\|_2$** 

**défini-positivité** Si  $f \in E$ ,  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \in \mathbb{R}^+$  par positivité de l'intégrale et si  $\|f\|_2 = 0$ , comme  $|f|^2$  est continue et positive, par positivité améliorée,  $|f|^2$  donc  $f$  est la fonction nulle sur  $[a, b]$ .

**homogénéité** Pas de difficulté.

**inégalité triangulaire** (Appelée inégalité de Minkowski dans ce cas.) Soient  $f, g \in E$ .

**Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

$$\|f+g\|_2^2 = \int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt = \int_a^b (f(t))^2 dt + \int_a^b (g(t))^2 dt + 2 \int_a^b f(t)g(t) dt \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

Comme tout est positif, on a bien  $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ .

**Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**  Pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe au programme. On se ramène au cas réel.

$$\|f+g\|_2^2 = \int_a^b |f+g|^2 = \int_a^b (f+g)(\bar{f}+\bar{g}) = \int_a^b (|f|^2 + |g|^2 + \bar{f}g + f\bar{g})$$

$$= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \int_a^b \Re(\bar{f}g)$$

$$\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \int_a^b |\bar{f}g|$$

$$\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \int_a^b |f||g|$$

$$\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{par inégalité de Cauchy-Schwarz (réelle), avec } |f|, |g| \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$$

$$\leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

Finalement,  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ . ■

## 4 Boules et sphères

On fixe  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

### Définition 10 : Boule et sphères

Soient  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ .

**Boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$**  :  $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$ .

**Boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$**  :  $B'(a, r) = B_f(a, r) = \overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$ .

**Sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$**  :  $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$ .

### Exemple

**E4** – Cas où  $r = 0$  :  $B(a, 0) = \emptyset$  et  $B'(a, 0) = S(a, 0) = \{a\}$ .

**E5** – Cas de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  :  $B(a, r) = ]a - r, a + r[$ ,  $B'(a, r) = [a - r, a + r]$ ,  $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$ .

**E6** – Boule unité fermée dans  $\mathbb{R}^2$  pour les trois normes usuelles.

### Définition 11 : Partie convexe

Une partie  $A$  de  $E$  est dite **convexe** lorsque pour tout  $x, y \in E$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $tx + (1 - t)y \in A$ .

### Remarque

**R12** –  $\{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}$  représente le segment formé par les extrémités des vecteurs  $x$  et  $y$ .

### Propriété 11 : Convexité des boules

*Les boules sont convexes.*

### Démonstration

Si  $x, y \in B(a, r)$ ,  $t \in ]0, 1[$ ,  $z = (1 - t)x + ty$ ,  $\|z - a\| = \|(1 - t)(x - a) + t(y - a)\| \leq (1 - t)\|x - a\| + t\|y - a\| < r$ .  
Le cas de  $B'(a, r)$  est similaire. ■

## 5 Parties, suites et fonctions bornées

### Définition 12 : Partie bornée

$A \in \mathcal{P}(E)$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq M$ .

### Propriété 12 : Les boules sont bornées

*Toute boule (ouverte ou fermée) de  $E$  est bornée.*

### Démonstration

Si  $z \in B(a, r) \cup B'(a, r)$ ,  $\|z\| = \|z - a + a\| \leq r + \|a\|$ . ■

**Remarque**

R 13 – Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par exemple fermée).

**Définition 13 : Fonction bornée**

Soit  $X$  un ensemble non vide,  $f \in E^X$ .

On dit que  $f$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $\|f(x)\| \leq M$  (ie si  $f(A)$  est une partie bornée de  $E$ .)

On note  $L^\infty(X, E) = \mathcal{B}(X, E)$  l'ensemble des fonctions de  $E^X$  bornées (notations hors-programme).

**Propriété 13 : Norme infini**

On pose, pour  $f \in \mathcal{B}(X, E)$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ , bien défini.

Alors  $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé.

**Démonstration**

Démonstration similaire à  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  en remplaçant  $|\cdot|$  par  $\|\cdot\|$  (ce qui est bien licite). ■

On obtient en particulier, pour  $X = \mathbb{N}$  :

**Définition 14 : Suite bornée**

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $u$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_n\| \leq M$  (ie si  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une partie bornée de  $E$ .)

On note  $\ell^\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$  l'ensemble des suites bornées à valeurs dans  $E$  (notation hors-programme).

**Remarque**

R 14 – On peut aussi définir une norme infini sur l'ensemble  $\ell^\infty(E)$  des suites bornées :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|$$

**6 Produit fini d'espaces vectoriels normés****Propriété 14**

Si  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

On pose, pour  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ ,

$$N(x) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k).$$

Alors  $N$  est une norme sur  $E_1 \times \dots \times E_p$  appelée **norme produit**.

**Remarque**

R 15 – En prenant  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{K}$ , la norme produit sur  $\mathbb{K}^n$  est  $\|\cdot\|_\infty$ .

## III SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

On fixe  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé non nul.

### 1 Convergence d'une suite

#### Définition 15 : Suite convergente, divergente

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ .

On dit que  $u$  **converge** vers  $\ell$  lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il y a un rang à partir duquel  $u_n$  est à distance au plus  $\varepsilon$  de  $\ell$ .

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que  $u$  est **convergente** et que  $\ell$  est sa **limite**. On note  $u_n \rightarrow \ell$  ou  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$ .  
Lorsque  $u$  n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

#### Remarque

R 16 –  $u_n \rightarrow \ell$  si et seulement si la suite réelle  $(\|u_n - \ell\|)_n$  converge vers 0.

R 17 –  $u_n \rightarrow \ell$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

R 18 – La convergence dépend a priori de la norme.

#### Définition 16 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,  $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $f \in E$ .

Si  $f_n \xrightarrow{N_1} f$ , on parle de **convergence en moyenne**.

Si  $f_n \xrightarrow{N_2} f$ , on parle de **convergence en moyenne quadratique**.

Si  $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$ , on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

#### Propriété 15 : Unicité de la limite

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell, \ell' \in E$ . Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $u_n \rightarrow \ell'$ , alors  $\ell = \ell'$ .

#### Démonstration

Démonstration similaire à celle des suites numérique en remplaçant les valeurs absolues/modules par des normes. ■

#### Propriété 16 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.

#### Démonstration

Il suffit par exemple de prendre  $\varepsilon = 1$  dans la définition. ■



### Propriété 17 : Convergence de la norme des termes

Soit  $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in E$ . Si  $u_n \rightarrow \ell$ , alors  $\|u_n\| \rightarrow \|\ell\|$ .

#### Démonstration

Par inégalité triangulaire,  $|\|u_n\| - \|\ell\|| \leq \|u_n - \ell\|$ .

### Propriété 18 : Convergence par majoration

Si  $u \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in E$  tel qu'à partir d'un certain rang  $\|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$  et  $\alpha_n \rightarrow 0$ , alors  $u_n \rightarrow \ell$ .

#### Démonstration

Par propriété sur les suites réelles, on a  $\|u_n - \ell\| \rightarrow 0$  ce qui signifie  $u_n \rightarrow \ell$ .

### Définition 17 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de  $u \in E^{\mathbb{N}}$  toute limite (dans  $(E, \|\cdot\|)$ ) de suite extraite de  $u$ .

### Propriété 19 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

#### Remarque

R 19 – Réciproque fausse.

### Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

## 2 Opérations algébriques

### Propriété 20 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit  $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ . Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$ , alors  $u + \lambda v$  est convergente et  $u_n + \lambda v_n \rightarrow \ell + \lambda \ell'$ .

### Propriété 21 : Produit externe de suites convergentes

Si  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  et  $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  tel que  $u_n \rightarrow \ell \in E$  et  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K}$ , alors  $\alpha_n u_n \rightarrow \alpha \ell$ .

### 3 Suite à valeurs dans un produit

#### Propriété 22 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés,  $N$  la norme produit sur  $E_1 \times \dots \times E_p$ ,  $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ .  
 Alors  $u \xrightarrow{N} \ell$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$ .

## III COMPARAISON DE NORMES

Soit  $(E, +, \times)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . On note  $B_1(a, r)$  (respectivement  $B_2(a, r)$ ) une boule ouverte pour  $N_1$  (respectivement  $N_2$ ).

### 1 Domination

#### Définition 18 : Domination

On dit que  $N_1$  est dominée par  $N_2$  lorsqu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$ .

#### Remarque

**R 20** – Traduction avec les boules :  $B_2(a, r/\alpha) \subset B_1(a, r)$ .

**R 21** – Si une partie ou une fonction ou une suite est bornée pour  $N_2$ , elle l'est automatiquement pour  $N_1$  aussi.

#### Propriété 23 : Implication de convergences

Soit  $N_1$  dominée par  $N_2$  et  $u \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ . Si  $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$ , alors  $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ .

#### Remarque

**R 22** – Si  $N_1$  n'est pas dominée par  $N_2$ , on fabrique une suite qui tend vers 0 pour  $N_2$  et diverge pour  $N_1$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $x_n \in E$  tel que  $N_1(x_n) > nN_2(x_n)$ . Il suffit alors de poser  $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}N_2(x_n)}x_n \dots$



#### Méthode 1 : Montrer que $N_1$ n'est pas dominée par $N_2$

On peut chercher une suite  $(u_n)$  telle que  $(N_2(u_n))$  borné mais pas  $(N_1(u_n))$  ou alors telle que  $N_2(u_n) \rightarrow 0$  et non  $N_1(u_n)$  ou encore tel que  $\frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \rightarrow +\infty$ .



## 2 Équivalence

### a Définition

#### Définition 19 : Normes équivalentes

$N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$ .

#### Remarque

R23 – C'est une relation d'équivalence.

#### Propriété 24 : Équivalence de convergence

Si  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes,  $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$  si et seulement si  $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$ .

### b Cas de $\mathbb{K}^n$

#### Propriété 25 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur  $\mathbb{K}^n$ .

#### Démonstration

Visualiser avec des boules.  
 $\| \cdot \|_1 \leq n \| \cdot \|_\infty$  cas d'égalité : vecteur constant.  
 $\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|_1$  cas d'égalité : tous nuls sauf 1.  
 $\| \cdot \|_1 \leq \sqrt{n} \| \cdot \|_2$  CS - cas d'égalité : celui de CS = tous égaux.  
 $\| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_1$  cas d'égalité : tous nuls sauf 1.  
 $\| \cdot \|_2 \leq \sqrt{n} \| \cdot \|_\infty$  cas d'égalité : tous égaux.  
 $\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|_2$  cas d'égalité : tous nuls sauf 1.

### c Cas de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

#### Propriété 26 : Domination des normes

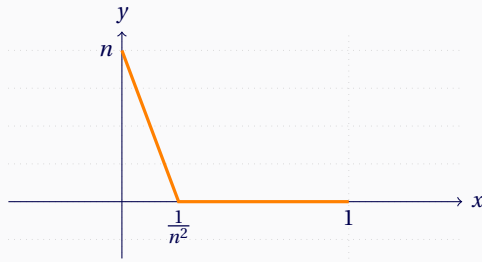
Sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,

- $N_1 \leq (b-a)N_\infty$  et  $N_\infty$  n'est pas dominée par  $N_1$ .
- $N_2 \leq \sqrt{b-a}N_\infty$  et  $N_\infty$  n'est pas dominée par  $N_2$ .
- $N_1 \leq \sqrt{b-a}N_2$  et  $N_2$  n'est pas dominée par  $N_1$ .

#### Démonstration

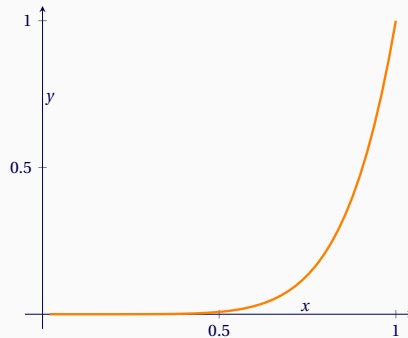
$N_1 \leq (b-a)N_\infty$  : plus facile de converger en moyenne qu'uniformément. Égalité pour une fonction constante.  
 $N_2 \leq \sqrt{b-a}N_\infty$  : égalité pour  $f$  constante.  
 $N_1 \leq \sqrt{b-a}N_2$  par Cauchy-Schwarz. Égalité pour  $f$  constante.  
 $N_\infty$  n'est pas dominée par  $N_1$  : sur  $[0, 1]$ ,  $f_n$  telle que  $N_\infty(f_n) = n$  et  $N_1(f_n) = \frac{1}{2n}$  : triangle entre  $(0, n)$  et  $(1/n^2, 0)$ .





Avec la même suite de fonctions,  $N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  :  $N_2$  n'est pas dominée par  $N_1$ .  
 Et donc  $N_\infty$  n'est pas dominée par  $N_2$ , sinon elle le serait par  $N_1$ ...

On peut aussi utiliser  $g_n : t \mapsto t^n$  sur  $[0, 1]$  avec  $N_\infty(g_n) = 1$ ,  $N_1(g_n) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  et  $N_2(g_n) = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$  qui permet de montrer que  $N_\infty$  n'est dominée ni par  $N_1$  ni par  $N_2$ .



**d** Cas de la dimension finie

**Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie**

*Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.*

**Démonstration**

Non exigible, admis provisoirement.

**Propriété 27 : Convergence coordonnée à coordonnée**

*Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.*



# IV TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

On se donne  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé fixé, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $d$  la distance associée.

## 1 Voisinages, ouverts, fermés

### a Voisinage

#### Définition 20 : Voisinage

Soient  $a \in E$  et  $V$  une partie de  $E$ .  
 On dit que  $V$  est un **voisinage** de  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset V$ , c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en  $a$  contenue dans  $V$ .

#### Remarque

R24 – Cela revient à dire qu'on a une distance de sécurité autour de  $a$  qui permet de s'en approcher dans toutes les directions en restant dans  $V$ .  
 En particulier,  $a \in V$ .

#### Propriété 28 : des voisinages

- (i) Si  $V$  voisinage de  $a$  et  $V \subset W$ , alors  $W$  est un voisinage de  $a$ .
- (ii) Une réunion quelconque de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .
- (iii) Une intersection **finie** de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

#### Démonstration

- (i) Facile.
- (ii) Si  $(V_i)_{i \in I}$  est une famille de voisinages de  $a$ , pour n'importe quel  $j \in I$ ,  $V_j \subset \bigcup_{i \in I} V_i$  donc, d'après la propriété (i),  $\bigcup_{i \in I} V_i$  est un voisinage de  $a$ .
- (iii) Si  $V_1, \dots, V_n$  sont des voisinages de  $a$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $r_i > 0$  tel que  $B(a, r_i) \subset V_i$ . Soit  $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$ . Alors  $B(a, r) \subset \bigcap_{i \in I} V_i$  qui est un voisinage de  $a$ . ■

#### Remarque

R25 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies.  
 Par exemple, dans  $\mathbb{R}$ , les  $V_i = ]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$  sont des voisinages de 0, mais  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$  n'est pas un voisinage de 0.

#### Propriété 29 : Voisinages et domination de norme

Si  $N_1$  est une norme dominée par  $N_2$ , alors les voisinages pour  $N_1$  sont des voisinages pour  $N_2$ .  
 Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

**Démonstration**

On a  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$ .  
 Si  $V$  est un voisinage de  $a$  pour  $N_1$ , on a un  $r > 0$  tel que  $N_1(x - a) < r \implies x \in V$ .  
 Alors  $N_2(x - a) < \frac{r}{\alpha} \implies x \in V$ .  
 Donc  $V$  est un voisinage de  $a$  pour  $N_2$ . ■

**b Parties ouvertes**

**Définition 21 : Ouvert**

Une partie  $\mathcal{O}$  de  $E$  est dite **ouverte** ou **un ouvert** de  $E$  lorsque  $\mathcal{O}$  est voisinage de tous ses points, autrement dit  $\forall a \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(a, r) \subset \mathcal{O}$ .  
 Par convention,  $\emptyset$  est ouvert.

**Remarque**

**R26** – Intuitivement, cela signifie qu’il n’y a pas de point « au bord ».

**Exemple**

- E7** – Les intervalles  $]0, 1[$ ,  $]0, 1]$ ,  $[0, 1]$  sont-ils des ouverts de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ?
- E8** – Le quart de plan  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > 0\}$  est-il un ouvert de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  ?
- E9** – Si  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b$ , alors  $]a, b[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 30 : Cas des boules ouvertes**

*Toute boule ouverte est ouverte (!)*

**Démonstration**

Si  $x \in E, r > 0, \mathcal{O} = B(x, r)$ .  
 Soit  $a \in \mathcal{O}$ . Alors  $B(a, r - d(x, a)) \subset \mathcal{O}$ . En effet, si  $d(a, b) < r - d(x, a)$ , alors  $d(x, b) < d(x, a) + d(a, b) < r$ . ■

**Propriété 31 : des ouverts**

- (i)  $\emptyset, E$  sont ouverts.
- (ii) Une réunion quelconque d’ouverts est ouverte.
- (iii) Une intersection **finie** d’ouverts est ouverte.
- (iv) Un produit **fini** d’ouverts est ouvert (pour la norme produit).

**Remarque**

**R27** – Ce n’est pas valable pour des intersections infinies, avec le même contre-exemple que pour les voisinages.  
 Dans  $\mathbb{R}$ , les  $V_i = ]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$  sont ouverts, mais  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$  ne l’est pas.



### Démonstration

- (i) Facile.
- (ii) Si les  $\mathcal{O}_i$  pour  $i \in I$  sont ouverts, et si  $a \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ , alors il existe  $j \in I$  tel que  $a \in \mathcal{O}_j$  qui est ouvert,  $\mathcal{O}_j$  est un voisinage de  $a$  et donc  $\mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  voisinage de  $a$ .
- (iii) Si  $a \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ , alors pour tout  $i$ ,  $a \in \mathcal{O}_i$  donc les  $\mathcal{O}_i$  sont tous voisinages de  $a$ , donc leur intersection (finie) l'est encore.
- (iv) On traite le cas du produit de deux ouverts. Le cas général se traite de façon similaire.  
Si  $\mathcal{O}_1$  est un ouvert de  $(E_1, N_1)$  et  $\mathcal{O}_2$  est un ouvert de  $(E_2, N_2)$ , montrons que  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$  est un ouvert de  $(E_1 \times E_2, N)$  où  $N$  est la norme produit.  
Soit  $(a_1, a_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ . Alors on a  $r_1 > 0$  et  $r_2 > 0$  tels que  $B_1(a_1, r_1) \subset \mathcal{O}_1$  et  $B_2(a_2, r_2) \subset \mathcal{O}_2$ .  
On vérifie alors que  $B_N((a_1, a_2), \min(r_1, r_2)) \subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ .

### Propriété 32 : Ouverts et domination de normes

*Si  $N_1$  est une norme dominée par  $N_2$ , alors les ouverts pour  $N_1$  sont des ouverts pour  $N_2$ .  
Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.*

### Démonstration

Les voisinages pour  $N_1$  sont des voisinages pour  $N_2$ .

### Remarque

**R28** – On appelle topologie de  $(E, \|\cdot\|)$  l'ensemble de ses ouverts.

Si  $N_1$  est dominée par  $N_2$ , la topologie pour  $N_2$  possède plus d'ouverts que celle pour  $N_1$ . On dit que la topologie pour  $N_2$  est **plus fine** que celle pour  $N_1$ .

**R29** – En particulier, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Les notions de voisinages et donc d'ouverts ne dépendent pas du choix de la norme. Ce sera aussi le cas de toutes les notions définies ci-après : fermé, adhérence, intérieur, densité.

### Exercice 1 : CCINP 37

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$  et  $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

- (a) Démontrer que  $N_\infty$  et  $N_1$  sont deux normes sur  $E$ .  
(b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .  
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .
- Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.

- (a) Prouvons que  $N_\infty$  est une norme sur  $E$ .  
 $\forall f \in E, |f|$  est positive et continue sur le segment  $[0, 1]$  donc  $f$  est bornée et donc  $N_\infty(f)$  existe et est positive.  
i) Soit  $f \in E$  telle que  $N_\infty(f) = 0$ .  
Alors,  $\forall t \in [0, 1], |f(t)| = 0$ , donc  $f = 0$ .  
ii) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soit  $f \in E$ . Comme  $|\lambda| \geq 0$ , on a par positive homogénéité de la borne supérieure  
$$N_\infty(\lambda f) = \sup_{x \in [0;1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in [0;1]} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| = |\lambda| N_\infty(f).$$
  
iii) Soit  $(f, g) \in E^2$ .  
 $\forall t \in [0, 1], |(f+g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$ .  
Donc  $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$ .  
On en déduit que  $N_\infty$  est une norme.  
Prouvons que  $N_1$  est une norme sur  $E$ .

$\forall f \in E, |f|$  est continue et positive sur  $[0, 1]$  donc  $N_1(f)$  existe et est positive.

i) Soit  $f \in E$  telle que  $N_1(f) = 0$ .

Or  $|f|$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ , donc  $|f|$  est nulle.

C'est-à-dire  $f = 0$ .

ii) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soit  $f \in E$ .

$$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| N_1(f).$$

iii) Soit  $(f, g) \in E^2$ .

$\forall t \in [0, 1], |(f + g)(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ . Donc, par linéarité de l'intégrale,  $N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g)$ .

On en déduit que  $N_1$  est une norme sur  $E$ .

(b)  $k = 1$  convient car,  $\forall f \in E, \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 N_\infty(f) dt = N_\infty(f)$ .

(c) L'application identité de  $E$ , muni de la norme  $N_\infty$ , vers  $E$ , muni de la norme  $N_1$ , est continue car linéaire et vérifiant  $\forall f \in E, N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que : un ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .

On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour  $f_n(t) = t^n$ , on a  $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$  et  $N_\infty(f_n) = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$ .

Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

**C**

**Parties fermées**

**Définition 22 : Fermé**

Une partie  $F$  de  $E$  est dite fermée lorsque son complémentaire  $F^c$  est ouvert.

**Remarque**

R 30 – Intuitivement : bord compris.

R 31 –  Fermé n'est pas le contraire d'ouvert. On peut être les deux à la fois. Le plus souvent, on n'est ni l'un ni l'autre...

**Propriété 33 : Cas des boules fermées**

Toute boule fermée est fermée (!)

**Démonstration**

Soit  $F = B^f(a, r)$ .  $F^c = \{x \in E, d(x, a) > r\}$ .

Soit  $b \in F^c$ . On montre que  $B^f(b, d(b, a) - r) \subset F^c$ .

En effet, si  $x \in B^f(b, d(b, a) - r)$ ,  $d(a, x) \geq d(a, b) - d(x, b) \geq d(a, b) - (d(a, b) - r) = r$  donc  $x \in F^c$ . ■

**Remarque**

R 32 – Les singletons sont des fermés.



### Propriété 34 : des fermés

- (i)  $\emptyset, E$  sont fermés.
- (ii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.
- (iii) Une réunion **finie** de fermés est fermée.
- (iv) Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).

#### Remarque

R 33 – C'était l'inverse pour les ouverts.

R 34 – Ce n'est pas valable pour des réunions infinies.

Dans  $\mathbb{R}$ , les  $F_i = \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right]$  sont fermés, mais  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} F_i = ]-1, 1[$  ne l'est pas.

R 35 – Une partie finie est fermée.

#### Démonstration

Il suffit de passer au complémentaire et d'utiliser les propriétés des ouverts.  
Pour le produit, remarquer que

$$\left(\prod_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} E_j \times F_i^c \times \prod_{j=i+1}^n E_j\right)$$

qui est une réunion finie de produits finis d'ouverts. ■

#### Exemple

E 10 – Les intervalles  $]0, 1[$ ,  $]0, 1]$ ,  $[0, 1]$  sont-ils des fermés de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ?

E 11 – Si  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ , alors  $] -\infty, b]$ ,  $[a, +\infty[$ ,  $[a, b]$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$ .

### Propriété 35 : Cas des sphères

Toute sphère de  $E$  est fermée.

#### Démonstration

$S(a, r) = B'(a, r) \cap B^c(a, r)$  est une intersection de fermés. ■

### Propriété 36 : Caractérisation séquentielle

Une partie  $F$  de  $E$  est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de  $F$  a sa limite dans  $F$ .

#### Démonstration

( $\Rightarrow$ ) Si  $F$  est fermée, et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $F$ ,  $\ell \in E$  sa limite, on suppose, par l'absurde que  $\ell \in F^c$ , qui est ouvert.

On a donc  $r > 0$  tel que  $B(\ell, r) \subset F^c$ .

Or on a un rang à partir duquel  $x_n \in B(\ell, r)$  ce qui est contradictoire.

( $\Leftarrow$ ) Par contraposée, si  $F$  n'est pas fermée,  $F^c$  n'est pas ouverte, donc on a  $\ell \in F^c$  tel que pour tout  $r > 0$ ,  $B(\ell, r) \not\subset F^c$  ie  $B(\ell, r) \cap F \neq \emptyset$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Avec  $r = \frac{1}{n+1}$ , on a  $x_n \in B\left(\ell, \frac{1}{n+1}\right) \cap F$  donc tel que  $d(x_n, \ell) \leq \frac{1}{n+1}$ .

Alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$  et  $x_n \rightarrow \ell \notin F$ . ■

**Exemple**

É 12 –  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq x\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2 : CCINP 41**

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans  $\mathbb{R}^2$ . Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

**Remarques :**

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que  $\mathbb{R}^2$  et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

1. Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés.

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application continue.

L'image réciproque d'un fermé de  $F$  par  $f$  est un fermé de  $E$ .

**Exemple :**  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  car c'est l'image réciproque du fermé  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$  par l'appli-

$$\text{cation continue } f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{matrix}.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $F \subset E$ .

$F$  est un fermé de  $E$  si et seulement si  $\complement_E F$  est un ouvert de  $E$ .

**Exemple :**  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  car  $\complement_{\mathbb{R}^2} B$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet,  $\complement_{\mathbb{R}^2} B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} = B_o(0, 1)$  où  $B_o(0, 1)$  désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ .

Puis, comme toute boule ouverte est un ouvert, on en déduit que  $\complement_{\mathbb{R}^2} B$  est un ouvert.

3. Caractérisation séquentielle des fermés :

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ .

$A$  est un fermé de  $E$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ , alors  $x \in A$ .

**Exemple :**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1\}$  est un fermé.

En effet, soit  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $C$  qui converge vers  $(x, y)$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n y_n \geq 1$ , donc, par passage à la limite,  $xy \geq 1$  donc  $(x, y) \in C$ .

4. Une intersection de fermés d'un espace vectoriel normé  $E$  est un fermé de  $E$ .

**Exemple :**  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ .

On pose  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1\}$  et  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$ .

D'après 3.,  $D_1$  est un fermé.

$D_2$  est également un fermé.

En effet,  $D_2$  est l'image réciproque du fermé  $[0, +\infty[$  de  $\mathbb{R}$  par l'application continue  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{matrix}$ .

On en déduit que  $D = D_1 \cap D_2$  est un fermé de  $E$ .

**Remarque :**

On peut aussi utiliser le fait qu'un produit de compacts est un compact et qu'un ensemble compact est fermé.

Exemple :  $E = [0; 1] \times [2; 5]$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, comme  $[0; 1]$  et  $[2; 5]$  sont fermés dans  $\mathbb{R}$  et bornés, ce sont donc des compacts de  $\mathbb{R}$ .

On en déduit que  $E$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  donc un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .



## 2 Adhérence, densité, intérieur

### a Points adhérents, adhérence

**Remarque**

R36 – Intuitivement, un point adhérent est un point dans  $A$  ou « au bord » de  $A$ .

**Définition 23 : Point adhérent**

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $x$  est adhérent à  $A$  lorsque  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Propriété 37 : Caractérisation séquentielle**

$x$  est adhérent à  $A$  si et seulement s'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

**Démonstration**

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $x$  est adhérent à  $A$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Avec  $r = \frac{1}{n+1}$ , on a  $a_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$  donc tel que  $d(a_n, x) \leq \frac{1}{n+1}$ .

Cela définit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \rightarrow x$ .

( $\Leftarrow$ ) Si on a une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \rightarrow x$ , alors pour tout  $r > 0$ , on a un rang à partir duquel  $a_n \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . ■

**Définition 24 : Adhérence**

L'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$  est l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

**Remarque**

R37 – Ne pas confondre avec le complémentaire.

R38 – Intuitivement, « les points de  $A$  et les points des bords ».

**Exemple**

E 13 –

$E$	$A$	$\overline{A}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$]0, 1[$	$[0, 1]$
$E$	$B(a, r)$	$B'(a, r)$

Pour la dernière, si  $x \in \overline{B(a, r)}$ , on a une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $B(a, r)$  telle que  $x_n \rightarrow x$ . Donc pour tout  $n$ ,  $d(x_n, a) < r$  et alors  $d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a) < d(x, x_n) + r$ . En passant à la limite,  $d(x, a) \leq r$ , donc  $\overline{B(a, r)} \subset B'(a, r)$ .

Réciproquement, si  $x \in B'(a, r)$ , soit  $x_n = a + (1 - \frac{1}{n})(x - a) \rightarrow x$  et  $x_n \in B(a, r)$  donc, par caractérisation séquentielle,  $x \in \overline{B(a, r)}$ .

Finalement,  $\overline{B(a, r)} = B'(a, r)$ .



**Propriété 38 : Croissance**

*Si  $A \subset B$ , alors  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .*

**Démonstration**

Caractérisation séquentielle. ■

**Propriété 39 : Caractérisation**

*$\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .*

**Démonstration**

**$\overline{A}$  est un fermé de  $E$  contenant  $A$**  : Par définition, on a bien  $A \subset \overline{A}$ . Puis on montre que  $\overline{A}^c$  est ouvert.

Si  $x \notin \overline{A}$ , on a  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ . Si  $y \in B(x, r)$ ,  $B(y, r - d(x, y)) \cap A = \emptyset$  donc  $y \notin \overline{A}$ .

**Il est plus petit que les autres** : Si  $F$  est un fermé contenant  $A$ , et si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $A \subset F$  convergente, alors sa limite est dans  $F$  donc  $\overline{A} \subset F$ . ■

**Propriété 40 : Caractérisation des fermés**

*$F$  est un fermé de  $E$  si et seulement si  $\overline{F} = F$ .*

**Démonstration**

Si  $F = \overline{F}$ ,  $F$  est fermé d'après ce qui précède.

Si  $F$  est fermé, on a déjà  $F \subset \overline{F}$ .

Puis, si  $x \in \overline{F}$ ,  $x$  est limite d'une suite d'éléments de  $F$  donc  $x \in F$ .

**Propriété 41 : Cas des sous-espaces**

*Si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\overline{A}$  l'est aussi.*

**Démonstration**

Conséquence de la caractérisation séquentielle. ■

**Exercice 3 : CCINP 34**

Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :  $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $x_n \rightarrow x$ .
3. Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\overline{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Démontrer que si  $A$  est convexe alors  $\overline{A}$  est convexe.

1. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ .

$\mathcal{V}(a)$  désigne l'ensemble des voisinages de  $a$ .

$\forall r > 0, B_0(a, r)$  désigne la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

Soit  $a \in A$ .

$$a \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Ou encore :

$$a \in \overline{A} \iff \forall r > 0, B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$



2. Soit  $x \in \bar{A}$ .

Prouvons que  $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

Par hypothèse,  $\forall r > 0$ ,  $B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_0(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ .

C'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists x_n \in B_0(x, \frac{1}{n}) \cap A$ .

On fixe alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul, un tel  $x_n$ .

Ainsi, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite à valeurs dans  $A$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$ .

C'est-à-dire la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x$ .

Soit  $x \in E$ . On suppose que  $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

Prouvons que  $x \in \bar{A}$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(x)$ . Alors,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $B_0(x, \varepsilon) \subset V$ .

On fixe un tel  $\varepsilon$  strictement positif.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  donc  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \implies \|x_n - x\| < \varepsilon$ .

On fixe un tel entier  $N$ .

Donc, comme  $(x_n)$  est à valeurs dans  $A$ , on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \implies x_n \in B_0(x, \varepsilon) \cap A$ .

Or  $B_0(x, \varepsilon) \subset V$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N \implies x_n \in V \cap A$ , c'est-à-dire  $V \cap A \neq \emptyset$ .

On peut en conclure que  $x \in \bar{A}$ .

3.  $\bar{A} \subset E$  et  $0_E \in \bar{A}$  car  $0_E \in A$  et  $A \subset \bar{A}$ .

Soit  $(x, y) \in (\bar{A})^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

D'après 1., il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  d'éléments de  $A$  convergeant respectivement vers  $x$  et  $y$ .

On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$ .

Or  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_n, y_n) \in A^2$ , donc  $x_n + \lambda y_n \in A$ .

On en déduit que la suite  $(x_n + \lambda y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans  $A$  et converge vers  $x + \lambda y$ .

On a bien  $x + \lambda y \in \bar{A}$ .

4. On suppose que  $A$  partie non vide et convexe de  $E$ . Prouvons que  $\bar{A}$  est convexe.

Soit  $(x, y) \in (\bar{A})^2$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .

Prouvons que  $z = tx + (1-t)y \in \bar{A}$ .

$x \in \bar{A}$ , donc il existe une suite  $(x_n)$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

$y \in \bar{A}$ , donc il existe une suite  $(y_n)$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ .

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = tx_n + (1-t)y_n$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$ ,  $y_n \in A$  et  $A$  est convexe, donc  $z_n \in A$ . De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ .

Donc  $z$  est limite d'une suite à valeurs dans  $A$ , c'est-à-dire  $z \in \bar{A}$ .

#### Exercice 4 : CCINP 44

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que :  $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ .

2. Montrer que :  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que :  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ .

(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On note  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ .

1. (a)  $x \in \bar{A}$  si et seulement si il existe une suite à valeurs dans  $A$  qui converge vers  $x$ .

(b) On suppose  $A \subset B$ . Prouvons que  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

Soit  $x \in \bar{A}$ .

Il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ .

Or  $A \subset B$ , donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in B$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ .

Donc  $x \in \bar{B}$ .

2. D'après la question précédente,

$A \subset A \cup B$ , donc  $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ .

$B \subset A \cup B$ , donc  $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Donc  $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Prouvons que  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Soit  $x \in \overline{A \cup B}$ .

Il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A \cup B$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ .

On considère les ensembles  $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in A\}$  et  $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in B\}$ .

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A \cup B$ ,  $A_1$  ou  $A_2$  est de cardinal infini.

On peut donc extraire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  ou une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $B$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = x$ .

Donc  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .

**Remarque :** On peut aussi prouver que  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$  sans utiliser les suites :

$\overline{A}$  et  $\overline{B}$  sont fermés, donc  $\overline{A \cup B}$  est un fermé contenant  $A \cup B$ . Or  $\overline{A \cup B}$  est le plus petit fermé contenant  $A \cup B$ , donc  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ .

3. (a) D'après la question 1. ,

$A \cap B \subset A$ , donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ .

$A \cap B \subset B$ , donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ .

Donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

**Autre méthode :**

Comme  $A \subset \overline{A}$  et  $B \subset \overline{B}$  alors  $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

Comme  $\overline{A} \cap \overline{B}$  est un fermé contenant  $A \cap B$ , alors par minimalité de  $\overline{A \cap B}$ , on a  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

(b)  $A = ]0, 1[$  et  $B = ]1, 2[$ .

$\overline{A \cap B} = \emptyset$  et  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$ .

### Exercice 5 : CCINP 45

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$ .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de  $\overline{A}$ .

(b) Prouver que, si  $A$  est convexe, alors  $\overline{A}$  est convexe.

2. On pose :  $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

(a) Soit  $x \in E$ . Prouver que  $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$ .

(b) On suppose que  $A$  est fermée et que :  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t)d_A(y)$ . Prouver que  $A$  est convexe.

1. (a) Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .

$x \in \overline{A} \iff$  il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

(b) On suppose que  $A$  est une partie non vide et convexe de  $E$ . Prouvons que  $\overline{A}$  est convexe.

Soit  $(x, y) \in (\overline{A})^2$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .

Prouvons que  $z = tx + (1-t)y \in \overline{A}$ .

$x \in \overline{A}$  donc, il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

$y \in \overline{A}$  donc, il existe une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ .

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = tx_n + (1-t)y_n$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A, y_n \in A$  et  $A$  est convexe, donc  $z_n \in A$ . De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ .

Donc  $z$  est limite d'une suite à valeurs dans  $A$ , c'est-à-dire  $z \in \overline{A}$ .

2. (a) Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . Soit  $x \in E$  tel que  $d_A(x) = 0$ .

Par définition de la borne inférieure, nous avons :  $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tel que  $\|x - a\| < \epsilon$ .

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , pour  $\epsilon = \frac{1}{n}$ , il existe  $a_n \in A$  tel que  $\|x - a_n\| < \frac{1}{n}$ .

Alors la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ainsi construite est à valeurs dans  $A$  et converge vers  $x$ , donc  $x \in \overline{A}$ .

(b) On suppose que  $A$  est fermée et que,  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t)d_A(y)$ .

Soit  $(x, y) \in (A)^2$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .

Prouvons que  $z = tx + (1-t)y \in A$ .

Par hypothèse, on a  $d_A(z) \leq t d_A(x) + (1-t)d_A(y)$ . (1)

Or  $x \in A$  et  $y \in A$ , donc  $d_A(x) = d_A(y) = 0$  et donc, d'après (1),  $d_A(z) = 0$ .

Alors, d'après 2.(a),  $z \in \overline{A}$ . Or  $A$  est fermée, donc  $\overline{A} = A$  et donc  $z \in A$ .



## b Densité

### Définition 25 : Densité

$D$  est **dense** dans  $E$  lorsque  $\overline{D} = E$ , c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre  $D$ .

### Propriété 42 : Caractérisation séquentielle

$D$  est dense dans  $E$  si et seulement si tout élément de  $E$  est limite d'une suite d'élément de  $D$ .

### Exemple

E 14 –  $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{D}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

E 15 – Théorème de Weierstraß : le sous-espace des fonctions polynomiales sur  $[a, b]$  est dense dans  $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), N_\infty)$  (donc a fortiori dans  $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), N_1)$  et  $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), N_2)$ ).

Le sous-espace des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est dense dans  $(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K}), N_\infty)$  (donc a fortiori dans  $(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K}), N_1)$  et  $(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K}), N_2)$ ).

## c Intérieur

### Définition 26 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit  $A$  une partie de  $E, x \in E$ .

$x$  est un **point intérieur** à  $A$  lorsque  $A$  est un voisinage de  $x$ , c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en  $x$  incluse dans  $A$ .

L'ensemble des points intérieurs à  $A$  est appelé **intérieur** de  $A$ , noté  $\overset{\circ}{A}$ .

### Propriété 43 : Croissance

Si  $A \subset B$ , alors  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

### Propriété 44 : Caractérisation

$\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ .

### Démonstration

$\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $E$  contenu dans  $A$  : Par définition, on a bien  $\overset{\circ}{A} \subset A$ . Puis, si  $x \in \overset{\circ}{A}$ , on a  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ . Mais si  $y \in B(x, r)$  qui est ouverte, alors  $B(x, r)$  est un voisinage de  $y$  donc  $A$  est un voisinage de  $y$ , donc  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$ .

Il est plus grand que les autres : Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert contenu dans  $A$ , alors  $\mathcal{O}$  est voisinage de tous ses points donc  $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$ . ■

### Propriété 45 : Caractérisation des ouverts

$\mathcal{O}$  est ouvert si et seulement si  $\overset{\circ}{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ .

### Démonstration

Si  $\overset{\circ}{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ , alors  $\mathcal{O}$  est ouvert d'après ce qui précède.

Puis, d'après la caractérisation,  $\overset{\circ}{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$  et si  $\mathcal{O}$  est ouvert,  $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{\mathcal{O}}$ . ■

**Exemple**

E 16 –  $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset : \mathbb{Q}$  ne contient pas d'intervalles ouverts non vides.

E 17 –  $\overline{B'(a, r)} = B(a, r) : B(a, r)$  est un ouvert contenu dans  $B'(a, r)$ , donc  $B(a, r) \subset \overline{B'(a, r)}$ , et  $\overline{B'(a, r)} \subset B'(a, r)$ , mais si  $x \in S(a, r)$ ,  $B'(a, r)$  n'est pas un voisinage de  $x$ , donc  $x \notin \overline{B'(a, r)}$  donc  $\overline{B'(a, r)} \subset B(a, r)$

**d** **Frontière**

**Définition 27 : Frontière**

On appelle **frontière** de  $A$  l'ensemble  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

**Exemple**

E 18 –  $\text{Fr}(B(a, r)) = S(a, r)$ .

E 19 –  $\text{Fr}([0, 1]) = \{0, 1\}$ .

E 20 –  $\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ .

**Propriété 46 : Caractère fermé**

*Une frontière est toujours fermée.*

**Démonstration**

$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overset{\circ}{A}^c$  est une intersection de fermés donc est fermée.

**3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs**

On se fixe une partie  $A$  non vide de  $E$ .

**a** **Voisinage relatif**

**Définition 28 : Voisinage relatif**

Soit  $a \in A$ . On appelle **voisinage relatif de  $a$  dans  $A$**  toute partie  $V'$  de  $A$  s'écrivant  $V' = A \cap V$  où  $V$  est un voisinage de  $a$ , c'est-à-dire telle qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \cap A \subset V'$ .

**Remarque**

R 39 –  $V'$  n'est pas nécessairement un voisinage de  $a$  dans  $E$ .

Par exemple  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  est un voisinage de 0 dans  $[0, 1]$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ .

**b** **Ouverts relatifs**

**Définition 29 : Ouvert relatif**

Une partie  $\mathcal{O}'$  de  $A$  est un **ouvert relatif de  $A$**  (ou **pour la topologie induite sur  $A$** ) lorsqu'elle est un voisinage relatif de chacun de ses points.

**Remarque**

R40 –  $\mathcal{O}'$  ouvert relatif de  $A$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathcal{O}'$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A \subset \mathcal{O}'$ .

**Propriété 47 : Caractérisation**

$\mathcal{O}'$  de  $A$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$ .

**Exemple**

E21 –  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$  est un ouvert de  $[0, 1]$ .

**Remarque**

R41 – Si  $A$  est ouvert, les ouverts relatifs de  $A$  sont les ouverts.

## c

 Fermés relatifs
**Définition 30 : Fermé relatif**

Une partie  $F'$  de  $A$  est un fermé **relatif de**  $A$  si son complémentaire **dans**  $A$  est un ouvert relatif de  $A$ .

**Propriété 48 : Caractérisation**

$F'$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement s'il existe un fermé  $F$  tel que  $F' = F \cap A$ .

**Remarque**

R42 – Si  $A$  est fermé, les fermés relatifs de  $A$  sont les fermés.

**Propriété 49 : Caractérisation séquentielle**

Soit  $F'$  une partie de  $A$ .  
 $F'$  fermé relatif de  $A$  si et seulement si  $F'$  est une partie de  $A$  telle que toute suite d'éléments de  $F'$  convergent **dans**  $A$  a sa limite dans  $F'$ .

**Démonstration**

Si  $F'$  est un fermé relatif de  $A$ , alors  $F' = F \cap A$  où  $F$  est fermé. Si  $(x_n) \in F'^{\mathbb{N}}$  tel que  $x_n \rightarrow \ell \in A$ , alors comme  $F$  est fermé,  $\ell \in F$  donc  $\ell \in F'$ .

Si toute suite d'éléments de  $F'$  convergent dans  $A$  a sa limite dans  $F'$ , soit  $F = \overline{F'}$ , fermé de  $E$ . Montrons que  $F' = F \cap A$ .

On a déjà  $F' \subset F \cap A$ . Puis, si  $x \in F \cap A = \overline{F'} \cap A$ , on a une suite d'éléments de  $F'$  convergent vers  $x \in A$  donc  $x \in F'$ . ■

## d

 Densité
**Définition 31 : Densité dans une partie**

Soit  $B$  partie de  $A$ .  $B$  est **dense dans**  $A$  si et seulement si  $A \subset \overline{B}$  si et seulement si tout élément de  $A$  est limite d'une suite d'éléments de  $B$ .