PROBLÈME

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $]0,1]$ ainsi que sur $[1,+\infty[$

Au voisinage de 0, on a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-\alpha<1$, donc par comparaison, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur }]0,1].}$

Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2-\alpha>1$, donc par comparaison, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[.}$

Q2. On a, par changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$,

$$I(1-\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{u^\alpha}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u = J(\alpha)$$

Donc $\boxed{I(1-\alpha) = J(\alpha).}$

Q3. Pour x fixé dans $]0,1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x)|<1$, la série est donc convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$

Supposons que la série converge uniformément sur $]0,1[$. Comme $f_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} (-1)^n$, le théorème de la double limite entraînerait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ converge ce qui n'est pas le cas.

Donc $\boxed{\text{la série ne converge pas uniformément sur }]0,1[.}$

On peut aussi remarquer que $||f_n||_\infty = 1 \not\to 0$ donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

Q4. On a $\displaystyle S_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

- **H1** $\forall x \in]0,1[$, $S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$. (Et le programme ne demande pas de préciser que les S_n et f sont continues par morceaux sur $]0,1[$.)
- **H2** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $|S_n(x)| \leq 2$ et la fonction $t \mapsto 2$ est intégrable sur $[0,1]$ donc sur $]0,1[$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I(\alpha)$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $\boxed{I(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}.}$

Q5. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha) + J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k} \\
&\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k+1 \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{-\alpha+n} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-2\alpha)}{-\alpha^2+n^2}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{I(\alpha) + J(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} + 2\alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.}$

Q6. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q7. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, fonction continue et positive sur $]0, +\infty[$

$\psi_x(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc par équivalent avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_0^1 \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$t^2\psi_x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\boxed{\Gamma \text{ est bien définie pour tout } x \in]0, +\infty[.}$

Q8. On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $g : (x, t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,e^{-xt}$

H1 Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. (Le programme ne demande pas de vérifier que les fonctions $t \mapsto g(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.)

H2 Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|g(x,t)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1} = f(t)$ et f est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question **Q1**.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\text{la fonction } f_\alpha \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[.}$$

Q9. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$, on conserve la notation de g de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a,b]\times]0,+\infty[$

H1 $\forall x \in [a,b]$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question **Q8** (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).

H2 $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto -\dfrac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}$.

(Le programme ne demande pas de préciser que les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.)

H3 $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-at}$ et $t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$, équivalente en 0 à t^α avec $\alpha < 1$ et est un $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable par comparaison à des fonctions de Riemann sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$.

On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Ceci étant pour tout a et b de $]0,+\infty[$, on en conclut que $\boxed{f_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[,}$ et

$$\boxed{f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t.}$$

Q10. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

Soit $x > 0$, on note $g_x : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, e^{-xt}$ définie sur $]0,+\infty[$

H1 $\forall t \in]0,+\infty[$, $g_x(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g(t) = 0$

H2 $\forall (x,t) \in (]0,+\infty[)^2$, $|g_x(t)| \leq f(t)$ et f est intégrable sur $]0,+\infty[$ (toujours **Q1**)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée $\boxed{f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\, \mathrm{d}t = 0.}$

Q11. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$,

- $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc, par équivalent et critère de Riemann, h est intégrable sur $]0,1]$.
- $t^2 \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, h est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On montre ainsi que h est intégrable sur $]0,+\infty[$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q12. Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}+t^\alpha}{t+1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

on effectue le changement de variable $u = xt$

$$\boxed{f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}}$$

Q13. Calcul préliminaire, on note $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

On a g qui est définie d'après la question 19 et de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$

g_α est donc de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

et on a

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha)e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \Gamma(\alpha)e^x\left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha}\right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g_\alpha \text{ est une solution particulière de l'équation différentielle } y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.}$

Considérons l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ pour $x > 0$

L'équation sans second membre associée est $y' - y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = k\,e^x$ où k est un réel.

Comme g_α est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont $y(x) = k\,e^x + g_\alpha(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

f_α étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = k\,e^x + g_\alpha(x)$.

Il reste à déterminer la valeur de k.

On a de l'équation précédente l'égalité $e^{-x}f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

En utilisant les résultats des questions 18 et 19, on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ que $k = 0$.

On conclut ainsi que $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x).}$

Q14. En posant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour $x > 0$.

On sait d'après la question 8 que f_α est continue sur $[0, +\infty[$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_\alpha(0) &= \lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) \quad \text{(par continuité de } f_\alpha \text{ en } x = 0\text{)} \\ &= \lim_{x\to 0} g_\alpha(x) \quad \text{(car } f_\alpha = g_\alpha \text{ pour } x > 0\text{)} \\ &= \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'autre part, comme $f_\alpha(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$, on obtient l'égalité demandée.

Q15. On sait d'après la question 6 que $f_\alpha(0) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$
avec l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

Q16. On pose $u = t^2$ dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$

On en déduit que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive)

Et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

FIN