CONCOURS ESIM - Session 2001

Filière MP

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures

L'utilisation de toute calculatrice est interdite pour cette épreuve.

Préliminaires

Dans toute la suite, $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ celui des réels, $\mathbf{C}$ celui des complexes, $\mathbf{R}[X]$ celui des polynômes à une variable à coefficients réels et , pour n entier naturel, $\mathbf{R}_n[X] = \{P \in \mathbf{R}[X] \ / \ d^oP \leq n\}$; $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Si A est une matrice, ${}^tA$ représente sa transposée.

PROBLÈME 1

Soit n un entier au moins égal à 2; pour i entier variant de 0 à n, on considère le polynôme :

$$P_i(X) = (1-X)^i\,(1+X)^{n-i};$$

si a_{ij} est le coefficient de X^{i-1} dans P_{j-1}, soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$;
on note $E = \mathbf{R}_n[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

1. Dans cette question seulement $n = 2$; expliciter A et déterminer ses éléments propres.

2. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E.
(On pourra étudier, pour i fixé, les indices j tels que $(1+X)^{n-i}$ divise P_j.)

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$;

a. Calculer, pour tout j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\,P_{i-1}$.

b. Calculer A^2 et en déduire le polynôme minimal de A ; A est-elle diagonalisable ?

c. Calculer $|\det(A)|$.

4. On suppose n impair dans cette question ; soit $m = (n-1)/2$;

a. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (1, X, \ldots, X^m, P_0, \ldots, P_m)$ est une base de E (on pourra étudier les diviseurs communs à $P_0, \ldots, P_m$.)

b. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$; en déduire le déterminant et la trace de A.

c. Quelles sont les valeurs propres de A ?

5. On suppose maintenant que n est pair et l'on pose $m = n/2$;

a. Montrer que $\mathcal{B}_2 = (1, X, \ldots, X^{m-1}, P_0, \ldots, P_m)$ est une base de E.

b. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$; en déduire le déterminant et la trace de A.

c. Quelles sont les valeurs propres de A ?

PROBLÈME 2

Soit n un entier au moins égal à 3 ; si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $c(A)$ sa comatrice, de terme général A_{ij}, cofacteur de a_{ij} dans A. On rappelle les relations :

$$A.{}^tc(A) = {}^tc(A).A = \det A.I_n.$$

On note $\chi_A(t)$ le polynôme $\det(A - t.I_n)$.
On confond tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ avec l'endomorphisme qu'il représente dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

On se propose de caractériser les matrices qui sont des comatrices.

1. Soient $A_0, A_1, \ldots, A_r$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{r} t^i A_i$, t élément de $\mathbf{C}$; montrer que si φ s'annule pour plus de r valeurs, alors les A_i sont toutes nulles.

2.a. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrer l'existence et l'unicité des matrices $R_0, \ldots, R_{n-1}$ telles que :

$$\forall\, t \in \mathbf{C},\ {}^tc(A - t.I_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i\, R_i.$$

b. Soit $P(t) = \dfrac{\chi_A(0) - \chi_A(t)}{t}$; démontrer $c(A) = P({}^tA)$.

3.a. Si A est de rang n, montrer que $c(A)$ est de rang n ; que vaut $c(c(A))$?

b. Si A est de rang $n-1$ et si $L_1, \ldots, L_n$ sont les lignes de A, calculer $c(A).L_i$ pour tout i et vérifier que le rang de $c(A)$ est 1.

c. Montrer que si le rang de A est au plus $n-2$, alors $c(A)$ est nulle.

4. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

a. Si M et N sont inversibles, montrer que $c(M.N) = c(M).c(N)$.

b. Soient $M(t) = M - t.I_n$ et $N(t) = N - t.I_n$, t complexe ; montrer que, pour tout t de module assez petit, $c(M(t).N(t)) = c(M(t)).c(N(t))$.

c. Vérifier que, pour M et N quelconques, $c(M.N) = c(M).c(N)$.

d. Si M est un projecteur, que peut-on dire de $c(M)$?

5. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, A projecteur de rang $n-1$.

a. Déterminer $\chi_A(t)$. (On pourra utiliser une base de $\operatorname{Im} A$ et une base de $\operatorname{Ker} A$.)

b. Montrer que $c(A) = I_n - {}^tA$.

c. Si M est un projecteur de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrer que M est une comatrice.

6. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, M diagonalisable de rang 1 ;

a. Montrer l'existence de λ complexe tel que $\lambda.M$ est un projecteur.

b. Montrer que M est une comatrice.

7. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, A non diagonalisable de rang 1 ;

a. Montrer que $A^2 = 0$ et que A est semblable à $A_1 = (\alpha_{ij})$, avec $\alpha_{1n} = 1$ et $\alpha_{ij} = 0$ sinon.

b. Soit $D_1 = (\beta_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, avec $\beta_{ii} = 1$ pour $i = 2, \ldots, n-1$, $\beta_{1n} = -1$ et $\beta_{ij} = 0$ dans tous les autres cas ; calculer $D_1^2 - D_1,\ D_1.A_1$ et $A_1.D_1$; que vaut le rang de D_1 ?

c. Montrer l'existence de D de rang $n-1$ telle que : $D^2 - D = A,\ A.D = D.A = 0$ et $I_n - D$ est de rang 2 ; comparer D^3 et D^2.

d. Montrer que $\chi_D(t) = t^2\,(1-t)^{n-2}$ et en déduire $c(D)$.

e. Montrer que A est une comatrice.

8. Caractériser les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui sont des comatrices.

Fin de l'énoncé