Intégrales à paramètres

Exercices vus en cours

1 Transformée de Fourier

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\widehat{f}:x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 Transformée de Laplace

Soit $f:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{K}$ intégrable.

1. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f):x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. On suppose que f a des limites (finies) en 0 et en $+\infty$.
   Montrer que $x\mathscr{L}(f)(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.
3. Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet
   (a) Montrer que l'intégrale généralisée $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
   (b) On définit, si $x\geqslant 0$, $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Calculer la limite de F en $+\infty$.
   (c) Montrer que $F(x)\xrightarrow[x\to 0]{}F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.
   On pourra utiliser la fonction $g:x\to\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
   (d) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'.
   (e) En déduire I.

3 CCINP 50

Solution de 3 : CCINP 50

1. Notons $f:\left\{\begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times[0;+\infty[& \mapsto & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-2t}}{x+t}\end{array}\right.$
   (a) $\forall x\in]0;+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   (b) $\forall t\in[0;+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   (c) Soit $[a,b]$ un segment de $]0;+\infty[$.
   $\forall x\in[a,b]$, $\forall t\in[0;+\infty[$, $|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi:t\mapsto\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.

   En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\varphi(t)=0$, donc $\varphi(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0;+\infty[$.

On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,
$F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$.

2. $\forall x \in]0;+\infty[,\ xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t}\,\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$.
   Posons $\forall x \in]0;+\infty[,\ \forall t \in [0;+\infty[,\ h_x(t) = \frac{x}{x+t}\,\mathrm{e}^{-2t}$.
   i) $\forall x \in]0;+\infty[,\ t \longmapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall t \in [0;+\infty[,\ \lim\limits_{x\to+\infty} h_x(t) = e^{-2t}$.
   La fonction $h : t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   iii) $\forall x \in]0;+\infty[,\ \forall t \in [0;+\infty[,\ |h_x(t)| \leqslant e^{-2t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,
   $$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$.
3. D'après 2., $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$, donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Autre méthode : le CV $u = x+t$ donne $F(x) = \mathrm{e}^{2x}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\mathrm{d}u$ ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}$ valant $u \mapsto -\dfrac{2u+1}{u^2}\mathrm{e}^{-2u}$, on « remarque » que $\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{2u+1}{2u^2}\mathrm{e}^{-2u}$, donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,
$$F(x) \sim \mathrm{e}^{2x}\int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2}\mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{2x}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{2u}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

D'où en particulier $xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

4 CCINP 30

Solution de 4 : CCINP 30

1. Voir ci-dessus.
2. On pose $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[,\ u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
   i) $\forall x \in \mathbb{R},\ t \longmapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ |u(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
   Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Donc, $t \longmapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$.
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. .
   - $\forall t \in [0,+\infty],\ x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

-iii) $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.

En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi(t)=0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t)=o(\dfrac{1}{t^2})$.

On en déduit que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et comme elle est continue sur $[0,1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

3. (a) On a, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

   Procédons à une intégration par parties. Soit $A\geqslant 0$.

$$\int_0^A -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^A-\int_0^A \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

   En passant à la limite quand $A\to+\infty$, on obtient $f'(x)+\dfrac{x}{2}f(x)=0$.

   Donc f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\dfrac{x}{2}y=0$.

   (b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x)=A\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A\in\mathbb{R}$.

5 La fonction Γ

On définit $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$?
3. Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.
4. Montrer que Γ est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.
5. Montrer que Γ est une fonction convexe.
6. Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,b]$, que $(\Gamma')^2\leqslant\Gamma\Gamma''$ et en déduire que Γ est $\ln$-convexe.
7. Montrer que Γ' s'annule en un $x_0\in]1,2[$ et nulle part ailleurs.
   On trouve numériquement que $x_0\approx 0{,}89$ *et* $\Gamma(x_0)\approx 1{,}46$.
8. Montrer que $\Gamma(x)\sim\dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et en déduire sa limite.
9. Déterminer la limite en $+\infty$ de Γ.
10. Tracer son graphe.
11. Montrer que $\forall x>0$, $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.

Voir aussi **CCINP 29**.

Solution de 5 : La fonction Γ

1. En effet, la fonction $f_x\ :\ t\longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive (utile pour avoir le droit d'utiliser des équivalents).

- Intégrabilité sur $[1,+\infty[$: par croissances comparées, $e^{-t}t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur x.
- Intégrabilité sur $]0,1]$: $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1>-1$, i.e. $x>0$.

2. Par intégration par parties, si $0<a<A$,

$$\int_a^A e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \left[e^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_{t=a}^{t=A} + \frac{1}{x}\int_a^A e^{-t}t^x\mathrm{d}t \tag{1}$$

Mais, par croissances comparées,

$$e^{-A}\frac{A^x}{x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

et de plus

$$e^{-a}\frac{a^x}{x} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

On en déduit, en prenant les limites quand $a\to 0$ et $A\to+\infty$ dans (1),

$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

Comme $\Gamma(1)=1$, pour tout $n\geqslant 1$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

3. On définit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$$

Et on constate facilement que
• Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

Domination *La domination, pour la continuité de Γ, est à la fois un peu technique et très importante.*
Soit $K=[a,b]$, $0<a<b$. On a

$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad 0\leqslant e^{-t}t^{x-1}\leqslant \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t\leqslant \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t> \end{cases}$$

Rien n'empêche une fonction « dominante » d'être définie par morceaux. Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :

$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad e^{-t}t^{x-1}\leqslant e^{-t}\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)$$

4. On reprend

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$$

Et on constate facilement que f est indéfiniment dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, avec pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} : (x,t)\longmapsto$$

En théorie, on peut ne dominer que la dernière dérivée partielle…mais il n'y en a pas ! On domine donc toutes les dérivées partielles.

Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque.

• Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

Domination : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $K = [a,b]$, $0 < a < b$. On a

$$\forall (x,t) \in K \times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \begin{cases} \left|\ln^k t\right| \cdot e^{-t}\, t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant \\ \ln^k t \cdot e^{-t}\, t^{b-1} & \text{si} \quad t > \end{cases}$$

(il faut bien sûr s'assurer que la fonction dominante est intégrable).

5. Facile.
6. Théorème de Rolle, puis croissance de Γ'.
7. $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$.
8. La limite existe par monotonie et $\Gamma(n) = (n-1)! \to +\infty$.
9. À x fixé, Appliquer le théorème de convergence dominée à $f_n : t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n]}(t)$.
   Pour la domination, utiliser l'inégalité de convexité $\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln x \leqslant x - 1$.
   Dominatrice : $\phi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$.

Autres exercices

6 Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \mathrm{d}t$. Étudier la définition de f, sa dérivabilité, puis la calculer.

Solution de 6 :

On trouve le domaine de définition : $]-1,+\infty[$. Sur lequel f est de classe C^1 (domination sur tout segment). Et on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On primitive, en remarquant que f a pour limite 0 en $+\infty$ (théorème de convergence dominée),

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

7 Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{t} \mathrm{d}t$.

Solution de 7 :

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}\sin(tx)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite x en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$. Mais on a, par croissances comparées,

$$e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc, $\sin$ étant bornée,

$$\left|\frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}\right| = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ et, par suite, sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est bien définie.

Définissons maintenant

$$h:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\end{array}\right.$$

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $h(x,.)\ :\ t\mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude de l'existence de l'intégrale).

• h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[\qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=e^{-t}\cos(xt)$$

• Pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, intégrable sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous mais on peut le voir rapidement : pas de problème en 0, et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

• Pour tout $t\in[0,+\infty[$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• **Domination :** On a alors

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-t}$$

et $\phi\ :\ t\mapsto e^{-t}$ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $]0,+\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (pas de problème en 0, et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut :

l'application $\phi\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \phi'(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt$$

on calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise $\phi(0)=0$.

8 **Oral Centrale** Définition, continuité et dérivabilités successives de $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

Solution de 8 : Oral Centrale

Le domaine de définition est $\mathbb{R}_*^+$. Le changement de variable $u=x+t$, $t=u-x$ permet de sortir x de l'intégrale. D'où assez facilement la classe C^∞.

9 **Calcul de l'intégrale de Gauß** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{4}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

10 **Oral Mines** On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier sa continuité.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en $+\infty$ de f.

Solution de 10 : Oral Mines

La fonction $t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{x^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 en lui donnant en général la valeur 0, sauf si $x=0$ (valeur $1/2$). Comme elle est $\underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, la comparaison avec les fonctions de Riemann donne l'intégrabilité. On définit sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ la fonction h par

$$h(x,t)=\frac{1-\cos t}{x^2+t^2}$$

est continue, et la domination

$$|h(x,t)|\leqslant\frac{1-\cos t}{t^2}$$

montre bien la continuité. Pour la classe C^1, h est dérivable par rapport à x, et pour tous $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\frac{-2x(1-\cos t)}{(x^2+t^2)^2}$$

est continue par rapport à chacune de ses variables, la domination

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{2b(1-\cos t)}{(a^2+t^2)^2}$$

(où $0<a<b$) montre la classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc sur $\mathbb{R}_*$ par parité. Il est possible de montrer que f n'est pas C^1 en montrant que f' a une limite infinie en 0. C'est un peu technique.

La limite en $+\infty$ est nulle (convergence dominée). La limite en 0 est

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(théorème de convergence dominée ou continuité). Et est donc un équivalent, car elle est non nulle. La recherche d'un équivalent en $+\infty$ est plus délicate. On essaye de « faire sortir » de l'intégrale quelque chose qui tend vers 0, en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable. Le changement de variable le plus naturel serait $t=xu$ qui ferait sortir un $1/x$:

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right)$$

et une intégration par parties de l'intégrale figurant dans cette expression donne l'équivalent $\dfrac{\pi}{2x}$.

11 **Oral Mines** Calculer $f(u)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-x^2-\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x$ pour $u\in\mathbb{R}$.

On admet la valeur de l'intégrale de Gauß : $f(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ *(voir exercice* ***10.****)*

Solution de 11 : Oral Mines

On étudie cette intégrale comme fonction de u :

$$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-iux}\,\mathrm{d}x$$

On voit qu'elle est C^1 assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre $f'(u)$ et $f(u)$: en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} -ixe^{-x^2-iux}\,\mathrm{d}x$$

on peut se servir du x pour intégrer par parties, en primitivant xe^{-x^2} et en dérivant e^{-iux} :

$$f'(u)=-i\left(\left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}e^{-iux}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2}e^{-x^2}(-iu)e^{-iux}\,\mathrm{d}u\right)$$

ce qui donne

$$f'(u)=-\frac{u}{2}f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante K telle que

$$\forall u\in\mathbb{R}\qquad f(u)=K\exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K=f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

12 **Oral Centrale ; Mines** Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition ?
2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
3. Calculer la dérivée de f, puis f.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$.

Solution de 12 : Oral Centrale ; Mines

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ se prolongeant par continuité à $[0,+\infty[$ et étant $\underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, or $3>1$…Définissons, sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$h\ :\ (x,t)\mapsto\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[\qquad\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que f est C^1 sur $\mathbb{R}$, sa dérivée valant en tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant $x \notin \{-1,0,1\}$. On cherche a,b,c,d tels que

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que $a = c = 0$. On réduit au même dénominateur, on voit que $b+d=1$ et $b+dx^2=0$, d'où les valeurs de b et d et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1}\frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1}\frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de x...supposons donc $x>0$ et $x \neq 1$ dorénavant. Alors

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour $x=1$ car f' est continue. Compte tenu de $f(0)=0$ on obtient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$$

et pour $x<0$, par imparité, on trouve $-f(-x)$...L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à $f(1)$.

13 **Oral Centrale** Calculer, pour x réel, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

(on étudiera la classe de f, et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle).

Solution de 13 : Oral Centrale

Il est prudent de commencer par étudier l'existence, qui ne pose pas trop de problèmes. On montre ensuite que f est de classe C^2 (domination facile). Sa dérivée seconde se calcule sans grande difficulté : on trouve

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mais $f(0)=f'(0)=0$, une double primitivation donne alors

$$f(x) = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

14 **Injectivité de la transformation de Laplace**

Soit f une application continue $[0,+\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif x_0 vérifiant $e^{-x_0t}f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

1. Démontrer que, si $x>x_0$, l'application $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $]x_0,+\infty[$.

   On note $\mathscr{L}(f)$ la fonction définie sur $]x_0,+\infty[$ par $\mathscr{L}(f) : s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]x_0,+\infty[$.
3. On suppose que $\mathscr{L}(f)$ est la fonction nulle.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt-(x_0+1)t}f(t)dt = 0$.

(b) Soit alors g définie sur $]0,1]$ par $g(u)=u^{x_0}f(-\ln u)$.
Démontrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 u^n g(u)\mathrm{d}u = 0$.

(c) En déduire que g, et donc f, est la fonction nulle.
Classique : utiliser le théorème de Weierstrass.

15 **Convolution « temporelle »** Soit f et g deux applications continues sur $\mathbb{R}^+$. On définit leur produit de convolution $f\star g=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$. Démontrer que $f\star g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et que $f\star g=g\star f$.

Indication : commencer par un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le segment $[0,1]$.

Solution de 15 : Convolution « temporelle »

Aucun problème de définition ; le changement de variable $t=x-u$, $u=x-t$ donne la commutativité. Pour la continuité, comme la variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale, comme il n'est pas possible de la faire sortir de l'intégrale, on la fait au contraire rentrer en effectuant le changement de variable $t=xu$, qui donne

$$(f\star g)(x)=x\int_0^1 f(xu)g(x(1-u))\mathrm{d}u$$

Ensuite, le théorème de continuité sous le signe $\int$, avec une domination sur tout segment (on ne peut pas faire mieux) : si K est un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$, soit $M\geqslant 0$ tel que $K\subset[0,M]$; en définissant h sur $\mathbb{R}^+\times[0,1]$ par

$$h(x,t)=f(xu)g(x(1-u))$$

on a

$$\forall (x,t)\in K\times[0,1] \qquad |h(x,t)|\leqslant N_\infty(f|_{[0,M]})N_\infty(g|_{[0,M]})$$

qui constitue une domination valable, une fonction constante étant intégrable sur $[0,1]$.

16 **Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet** On pose, pour $x\geqslant 0$, $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.
2. Écrire $g(x)$ sous la forme $\phi(x)\cos x+\psi(x)\sin x$, où $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux intégrales sur l'intervalle $[x,+\infty[$.
3. Étudier la continuité de f et de g.
4. Démontrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et sont toutes les deux solutions de $y''+y=\frac{1}{x}$.
5. Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Solution de 16 : Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

2. On trouve

$$g(x)=\cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\;-\;\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

4. On a vu que f et g étaient continues sur $[0,+\infty[$.

Montrons que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$:

Pour cela, on définit

$$h:\mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[\mapsto\mathbb{R}(x,t)\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

• Pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, la fonction $h(x,.)\ :\ t\mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $[0,+\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude du domaine de définition de f).

• h est deux fois dérivable (davantage, même !) par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[\quad\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\frac{-t\,e^{-xt}}{1+t^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$$

• Pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, les fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,.)$ sont continues (par morceaux suffirait) sur $[0,+\infty[$, intégrables sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous).

• Pour tout $t\in[0,+\infty[$, les fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}(.,t)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(.,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_*^+$.

• **Domination :** Soit a, b tels que $0<a<b$ et $S\subset[a,b]$. Si $k=1$ ou $k=2$, on peut majorer :

$$\forall(x,t)\in S\times[0,+\infty[\quad\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$$

et $\phi_S\ :\ t\mapsto\dfrac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (en effet, par croissances comparées, $\dfrac{t\,e^{-at}}{1+t^2}=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$).

En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut :

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$, et

$$\forall x>0\qquad f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$$

d'où l'on tire facilement $f''(x)+f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}\quad(x>0)$.

Montrons que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$:

On a vu que l'on pouvait écrire, sur $\mathbb{R}_*^+$,

$$g(x)=\phi(x)\ \cos x+\psi(x)\ \sin x$$

où ϕ et ψ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$, de dérivées $\phi'(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$ et $\psi'(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. Donc g est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$, et, pour tout $x>0$,

$$g'(x)=\cos x\ \phi'(x)-\sin x\ \phi(x)+\cos x\ \psi(x)+\sin x\ \psi'(x)=-\sin x\ \phi(x)+\cos x\ \psi(x)$$

ce qui permet de dire que g' est de classe C^1, donc g de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$, et, pour tout $x>0$,

$$g''(x)=-\sin x\ \phi'(x)-\cos x\ \phi(x)+\cos x\ \psi'(x)-\sin x\ \psi(x)=\frac{1}{x}-g(x)$$

d'où découle le résultat.

5. La fonction $f-g$ est solution sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation $y''+y=0$, elle est donc de la forme $t\mapsto a\cos t+b\sin t$ ou $t\mapsto A\cos(t+\phi)$. Mais on remarque que f a pour limite 0 en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite et théorème de convergence dominée, ou par simple majoration :

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt=\frac{1}{x}$$

et de même, comme ϕ et ψ ont des limites nulles en $+\infty$, c'est aussi le cas de g. Donc $A=0$ (on peut aussi dire qu'une fonction périodique ayant une limite en $+\infty$ est constante), donc $f=g$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Par continuité en 0, $f(0)=g(0)$, et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

17 Démontrer la formule suivante, pour $x>1$, $\zeta(x)\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.

Faire apparaître à droite $\Gamma(x)$ et une série géométrique...