Limites et intégrales

- **Suites d'intégrales**

  On dispose principalement de deux résultats :

  - *La convergence uniforme* : demande d'être sur un segment, fonctions continues et surtout la convergence uniforme elle-même, pas toujours facile à montrer.
  - *La convergence dominée* : plus simple car, justement, une convergence simple suffit. Sur un intervalle quelconque, y compris un segment, l'hypothèse de domination, à connaître parfaitement, garantit l'intégrabilité.

  Si aucun des résultats ne s'applique, c'est plus compliqué. On passe par des techniques standards comme les changements de variables, l'intégration par partie (prudente, sur un intervalle quelconque), le découpage d'intégrale...

  - Le découpage d'intégrale s'effectue par relation de Chasles en essayant de visualiser où l'intégrale se concentre lorsque n grandit. Il faut en général sortir les ε & co. et ce n'est pas toujours simple à rédiger (type Césaro...)
  - Pour des recherches d'équivalent, on effectue souvent un changement de variable pour sortir le n de sous l'intégrale, qui peut être suivi d'une application du théorème de convergence dominée.
  - Si n apparaît également dans les bornes de l'intégrale, on s'en débarrasse soit par un changement de variable, soit en faisant apparaître sous l'intégrale une fonction indicatrice $\mathbb{1}_I$ pour se ramener à un intervalle fixe. Cependant, si n apparaît seulement dans les bornes, on conclut directement, avec des résultats d'intégrabilité ou de continuité par exemple.
  - Des calculs de limites de fonctions $f : x \mapsto \displaystyle\int_a^b \phi(x,t)\,\mathrm{d}t$ peuvent se faire via les outils sur les suites : il suffit de passer par la caractérisation séquentielle.

- **Interversions séries intégrales**

  Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

  - Le théorème avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$ et sa version plus simple pour les fonctions à valeurs réelles positives : dans ce cas, la convergence simple de la série de fonction permet d'intervertir directement, qu'il y ait convergence ou non, en travaillant dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
  - Si $I = [a,b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément.

    Le plus agréable serait qu'elle converge normalement, donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

    En fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leqslant |b-a| N_\infty$, le premier théorème s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.
  - Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geqslant 0$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

    Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\displaystyle\int_a^b R_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est fini (et des majorations type Théorème Spécial sur des Séries Alternées peuvent être utiles...).

    On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée à S_n à condition d'être capable d'estimer la somme partielle...

1. Limites de suites d'intégrales

A. Exercices vu en cours

1 **Wallis** Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ converge, donner sa limite en appliquant un théorème puis en effectuant un découpage.

2 **Utilité de l'hypothèse de domination**

Définissons, sur $[0,1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\dfrac{1}{n+1}, 1\right]$, et prenant en $\dfrac{1}{n+1}$ la valeur $n+1$.

Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\displaystyle\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 **CCINP 25**

4 **CCINP 26**

5 **CCINP 27**

6 **Calcul de limite d'une transformée de Laplace**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $x \to +\infty$; la calculer.

7 **Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale**

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

8 **Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente**

Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Calculer la limite de F en $+\infty$.

Puis montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g : x \to \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *et l'exercice précédent.*

9 **CCINP 50**

B. Autres exercices

10 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite ℓ, et trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

11 Soit f réelle continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de terme général $n\int_0^1 t^n f(t)\,dt$ admet pour limite $f(1)$.

12 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

13 Soit f continue sur $[0,1]$.

1. Déterminer la limite ℓ quand n tend vers l'infini de $\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\,\mathrm{d}t$
2. On suppose f dérivable en 0 telle que $\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u \neq 0$.

   Déterminer un équivalent de $\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\,\mathrm{d}t\ -\ell$

14 **Oral Mines-Centrale** Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Etudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

15 **Oral Mines** Étudier la limite de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$.

16 Trouver un équivalent quand $n\to+\infty$ de $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}\,\mathrm{d}t$.

17 Pour tout entier naturel non nul n, on définit $I_n=\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\ \mathrm{d}x$.

Démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite que l'on exprimera sous forme intégrale.

18 **Oral CCINP** Soit $[\alpha,\beta]$ un segment réel ; soient (a_n) et (b_n) des suites telles que, pour tout n, $\alpha\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant\beta$ et (a_n) tend vers α, (b_n) tend vers β. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues sur $[\alpha,\beta]$ convergeant uniformément vers une certaine fonction f.

1. Etudier la convergence de la suite de terme général $\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\,dt$.
2. Soit $g:[1,e]\mapsto\mathbb{R}$ continue. Montrer que la suite de terme général $n\int_1^{1+1/n} g(t^n)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\int_1^e \frac{g(s)}{s}ds$.

2. Interversions séries-intégrales

A. Exercices vus en cours

19 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

20 On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum|a_n|$ converge. On définit, sur $\mathbb{R}$, $f\ :\ t\mapsto\sum_{p=1}^{+\infty} a_p\sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m\in\mathbb{N}_*$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)f(t)\mathrm{d}t=a_m$.

21 Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

22 **CCINP 19**

23 **CCINP 49**

B. Autres exercices

24 Montrer, en utilisant des séries géométriques, que

1. $\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.
3. $\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

25 **Oral Mines** Soit $I_n=\int_0^1\frac{t^n\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. Calculer la limite de I_n, puis un équivalent de I_n.

26 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\mapsto\frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1[$.

   On note $J_n=\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
2. Déterminer la limite de $(J_n)_n$.
3. Montrer que $J_n=\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.
4. Donner un équivalent de J_n.

27
1. Pour $a>0$ et $b>0$, montrer que $\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

28 Oral ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

Pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$, fonction 2π-périodique, on pose $I(f) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. I est-elle définie ?
2. En utilisant $\psi(t) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

Soit P un polynôme complexe. On pose $f_P(t) = P\left(e^{it}\right)$. On admet le théorème de d'Alembert-Gauß dans la question 3, mais pas dans la question 4.

3. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
4. En utilisant $P\left(re^{it}\right)$ pour r variable, donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß.