Régularité des suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercices vus en cours

1 **CCINP 10**

Solution de 1 : CCINP 10

1. Pour $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.
   On a $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)}{n+x}$, et donc : $\forall x \in [0,1]$, $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$.
   Ce majorant indépendant de x tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on peut intervertir limite et intégrale.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}-3$.

Autres exercices

2 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^p(1+n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > \alpha$.
3. Déterminer le limite pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 x^5\left(1+n^4\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$.

3 En utilisant le théorème de Weierstraß, montrer que si $f \in \mathscr{C}([a,b]),\mathbb{K})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle.

Solution de 3 :

Prendre une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f et écrire que $\displaystyle\int_a^b f^2 = \int_a^b (f-P_n)f + \int_a^b P_n f$.

Séries de fonctions

Exercices vus en cours

4 CCINP 14

Solution de 4 : CCINP 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a,b]$.
   On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|f_n - f\right\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} \left|f_n(x) - f(x)\right|$.
   On a $\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\left\|f_n - f\right\|_\infty$. (*)
   Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|f_n - f\right\|_\infty = 0$.
   Donc d'après (*), $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
   On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, donc converge simplement sur $[a,b]$.
   On pose alors, également, $\forall x \in [a,b]$, $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers S.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a,b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.
   On en déduit que S est continue sur $[a,b]$.
   Et d'après 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Or $\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$ car il s'agit d'une somme finie.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ce qui signifie que $\sum \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.
   Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur $[a,b]$ permet d' intégrer terme à terme, c'est-à-dire : $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R=1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subset]-1,1[$.
   De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ x\longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
   On en déduit alors, en utilisant 2., que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

5 Pour tout $n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1],\ f_n(x)=(-1)^n x^n(1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$.

En déduire la valeur de $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Solution de 5 :

Réponse : $2\ln 2-\frac{5}{4}$.

6 Montrer que $\zeta : x\in]1,+\infty[\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de ζ.

Montrer que $\eta : x\in\mathbb{R}_*^+\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

7 **CCINP 16**

Solution de 7 : CCINP 16

1. Soit $x\in[0,1]$.
   Si $x=0$, $u_n(0)=0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
   Si $x\neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x)=-\dfrac{x^2}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)|\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{2n^2}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.
   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
   $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x\in[0,1]$, $u_n'(x)=\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{-x}{n(x+n)}$.
   Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in[0,1]$, $|u_n'(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$.
   On en déduit que $\left\|u_n'\right\|_\infty=\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}\left|u_n'(x)\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.
   Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$.

Et on a : $\forall\, x\in[0;1]$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$.

2. En vertu de ce qui précède, $S'(1)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N+1}-1\xrightarrow[N\to+\infty]{}-1$.
Donc $S'(1)=-1$.

8 Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, on pose $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer f' et étudier les variations de f.

Autres exercices

9 Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

Solution de 9 :
Il y a convergence normale sur **R**, donc uniforme, les fonctions $x\mapsto 1/(n^4+n^2x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur **R** tout entier).

10 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n:x\mapsto \mathrm{e}^{-n}\cos\left(n^2x\right)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad\left|\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)-\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\right|\leqslant 10^{-3}.$$

11 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n:x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \mathrm{e}^{-n^2x}$.

Vérifier que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

Solution de 11 :
La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x>0$,

$$\exp(-n^2x)=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur $\mathbb{R}_*^+$, et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim\limits_{0}f_n=1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty=1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a,+\infty[$, $a>0$ (car $\|f_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0,+\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\widetilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, où l'on a fixé un $a>0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x>0$, $S(x)=1+e^{-x}+e^{-4x}+R(x)$ où

$$0 \leqslant R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2x} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1-e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1+e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(e^{-2x}\right)$$

12 1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ?

2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Solution de 12 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$$

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} = \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^A \frac{x^2}{1+tx^2}\mathrm{d}t$$

On intègre avec des $\ln$, on prend les limites quand $A\to+\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2, avec $1 \leqslant a \leqslant 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \sim_{x\to 0} -2\ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant n^2x^2. Donc, notant $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \sim_{x\to 0} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leqslant b \leqslant 2$, c'est agréable.

13 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Solution de 13 :

1. Pour f, on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :

$$\left|\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\right| = \frac{1}{|x+n+1|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

   donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x \notin \mathbb{Z}^-$.

   Pour g, on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\frac{1}{n!(x+n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0,\lfloor -x \rfloor)$ (pour avoir $x+n>0$), et, bien sûr, $\frac{1}{n!(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On vérifie que f converge normalement sur $[1,+\infty[$: si $x \geqslant 0$, $\left|\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.

   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par double limite, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Pour g, on a pour $x \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right| = \dfrac{1}{n!(x+n)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1,+\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. On calcule

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} \\ &= x\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)} = x\left(f(x)-\frac{1}{x}\right) = xf(x)-1. \end{aligned}$$

Puis,

$$xg(x) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)} = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}\right) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} - \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$

(licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n=0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre <0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc

$$xg(x) = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1+\mathrm{e}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)} = 1+g(x+1).$$

4. On obtient alors pour tout x, $f(x)-g(x) = \dfrac{f(x+1)-g(x+1)}{x}$ puis par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f(x)-g(x) = \frac{f(x+n)-g(x+n)}{x(x+1)...(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

avec $f(t)-g(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x(x+1)...(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (c'est la convergence simple de f).

5. Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on montre que $g(=f)$ l'est. On applique le théorème du cours : pour tout n, $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout k, $g_n^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+k}k!}{n!(x+n)^{k+1}}$. Pour montrer la convergence uniforme, on applique le TSSA sur une segment $[a,b]$ ne contenant pas d'entiers négatifs à partir d'un certain rang : $\left(\dfrac{k!}{n!(x+n)^{k+1}}\right)_{n\geqslant N}$ avec $N=\max(0,\lceil -b\rceil)$ (pour avoir $x+n>0$) décroît vers 0.

   Alors, en notant R_n^k le reste d'ordre n, $\left|R_n^k\right| \leqslant \dfrac{k!}{(n+1)!|x+n+1|^{k+1}} \leqslant \dfrac{k!}{(n+1)!|a+n+1|^{k+1}}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$, donc il y a convergence uniforme de toutes les séries de dérivées et le théorème du cours s'applique.

14 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\in\mathbb{R}^+ \mapsto \operatorname{Arctan}(x+n)-\operatorname{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

   On pourra penser au théorème des accroissements finis.

2. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Solution de 14 :

1. Utiliser le thoérème des accroissements finis. CN sur tout segment.
2. Se ramener au voisinage de 0 et utiliser la série divergente $\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$.