

## Régularité des suites et séries de fonctions

### Suites de fonctions

#### Exercices vus en cours

#### 1 CCINP 10

#### Autres exercices

- 2 Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  fixés. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^p(1 + n^\alpha e^{-nx})$ .
1. Montrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera.
  2. Démontrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  si et seulement si  $p > \alpha$ .
  3. Déterminer le limite pour  $n \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^1 x^5(1 + n^\alpha e^{-nx}) dx$ .

- 3 En utilisant le théorème de Weierstraß, montrer que si  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle.

### Séries de fonctions

- **Continuité, classe** : on utilise les théorèmes de transfert par convergence uniforme (sur tout segment).
- **Limites, équivalents** : penser au théorème de la double limite (attention, aux bornes de l'intervalle, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.) S'il ne s'applique pas, on peut penser à une comparaison avec une intégrale.  
Pour les équivalents, c'est plus compliqué. On peut penser à la comparaison avec une intégrale, ou à sortir certains termes de la somme...
- **Intégration sur un segment** : il suffit d'avoir la convergence uniforme.  
Pour l'intégration sur des intervalles quelconques, nous verrons un théorème plus tard (convergence dominée).

#### Exercices vus en cours

#### 4 CCINP 14

- 5 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$ .

Montrer que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$  puis déterminer  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

En déduire la valeur de  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ .

- 6 Montrer que  $\zeta : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ , donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de  $\zeta$ .  
Montrer que  $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

#### 7 CCINP 16

- 8 Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ , on pose  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ .

Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement vers  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Calculer  $f'$  et étudier les variations de  $f$ .

#### Autres exercices

- 9 Continuité, dérivabilité, variations, limites de  $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$ .

- 10 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions  $f_n : x \mapsto e^{-n} \cos(n^2 x)$ , puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| \leq 10^{-3}.$$

- 11 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions  $f_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto e^{-n^2 x}$ .  
Vérifier que sa somme est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , déterminer sa limite en  $+\infty$ , ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision  $e^{-2x}$  au voisinage de  $+\infty$ .  
Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

- 12 Pour quelles valeurs du réel  $x$  la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$  converge-t-elle ?  
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.  
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de  $+\infty$ .

- 13 Pour tout réel  $x \notin \mathbb{Z}^-$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$  et  $g(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ .
1. Justifier l'existence de  $f(x)$  et  $g(x)$ .
  2. Déterminer leurs limites en  $+\infty$ .
  3. Trouver une relation entre  $f(x+1)$  et  $f(x)$  et montrer que  $g$  vérifie cette même relation.
  4. En déduire que  $f = g$ .
  5. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

- 14 Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \text{Arctan}(x+n) - \text{Arctan}(n)$ .

1. Étudier l'existence et la continuité de  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .  
*On pourra penser au théorème au théorème des accroissements finis.*
2. Montrer que  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .