

Régularité des suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercices vus en cours

1 CCINP 10

Autres exercices

- 2 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^p(1 + n^\alpha e^{-nx})$.
1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f que l'on précisera.
 2. Démontrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $p > \alpha$.
 3. Déterminer le limite pour $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 x^5(1 + n^\alpha e^{-nx}) dx$.

- 3 En utilisant le théorème de Weierstraß, montrer que si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$, alors f est la fonction nulle.

Séries de fonctions

- **Continuité, classe** : on utilise les théorèmes de transfert par convergence uniforme (sur tout segment).
- **Limites, équivalents** : penser au théorème de la double limite (attention, aux bornes de l'intervalle, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.) S'il ne s'applique pas, on peut penser à une comparaison avec une intégrale.
Pour les équivalents, c'est plus compliqué. On peut penser à la comparaison avec une intégrale, ou à sortir certains termes de la somme...
- **Intégration sur un segment** : il suffit d'avoir la convergence uniforme.
Pour l'intégration sur des intervalles quelconques, nous verrons un théorème plus tard (convergence dominée).

Exercices vus en cours

4 CCINP 14

- 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ puis déterminer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

- 6 Montrer que $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$, donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de ζ .
Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

7 CCINP 16

- 8 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe \mathcal{C}^1 . Calculer f' et étudier les variations de f .

Autres exercices

- 9 Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$.

- 10 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto e^{-n} \cos(n^2 x)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| \leq 10^{-3}.$$

- 11 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto e^{-n^2 x}$.
Vérifier que sa somme est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_*^+ , déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.
Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

- 12 Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

- 13 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.
1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
 2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
 3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
 4. En déduire que $f = g$.
 5. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

- 14 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \text{Arctan}(x+n) - \text{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
On pourra penser au théorème au théorème des accroissements finis.
2. Montrer que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.