Intégration sur un segment

1. Calculs de primitives et d'intégrales

1 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

1. $(t+1)\operatorname{ch} t$
2. $t\sin^3 t$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$
4. $\dfrac{\ln t}{t+t\ln^2 t}$
5. $\dfrac{t^5}{1+t^{12}}$
6. $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
7. $\dfrac{1}{t^2\pm 2t+2}$
8. $\dfrac{t^4+1}{t^4-1}$
9. $\dfrac{1}{e^t+1}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$
11. $\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 t}$
12. $\dfrac{1}{\cos^3 t}$
13. $\dfrac{t}{1+\sqrt{t+1}}$
14. $\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
15. $\dfrac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$
16. $\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}$
17. $\dfrac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$
18. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch}^2 t}$
19. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$
20. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}$

Solution de 1 :

Indication :

1. IPP
2. IPP et transfromer $\sin^2$ et linéariser.
3. CV
4. CV
5. Direct
6. DES
7. Méthode classique
8. DES
9. $+\cdots-\cdots$ ou CV

Réponses :

1. $t\operatorname{sh} t-e^{-t}+C$ $(\mathbb{R})$
2. $\dfrac{1}{3}t\cos^3 t-t\cos t+\dfrac{2}{3}\sin t+\dfrac{1}{9}\sin^3 t+C$ $(\mathbb{R})$
3. $2\operatorname{Arctan}\sqrt{t}+C$ $(\mathbb{R}_*^+)$
4. $\dfrac{\ln(1+\ln^2 t)}{2}+C$ $(\mathbb{R}_*^+)$
5. $\dfrac{\operatorname{Arctan} t^6}{6}+C$ $(\mathbb{R})$
6. $\dfrac{\ln\left|t^2-1\right|-2\ln|t|}{2}+C_k$ $(I_1=]-\infty,-1[$ ou $I_2=]-1,0[$ ou $I_3=]0,1[$ ou $I_4=]1,+\infty[)$
7. $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)-\operatorname{Arctan}(t+1)+C$ (R) et $\operatorname{Arctan}(t-1)+C$ $(\mathbb{R})$
8. $t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|-\operatorname{Arctan} t+C_k$ sur $I_1=]-\infty,-1[$ ou $I_2=]-1,1[$ ou $I_3=]1,+\infty[$
9. $t-\ln\left(e^t+1\right)$
10. $t-\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2t}+1\right)$

2 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2+\cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin t\cos t}$
5. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dt}{\operatorname{ch} t}$
7. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{t}{t^3+1}\,dt$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

2. Manipulations d'intégrales

3 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution de 3 :

Intégrer $g : t \mapsto f(t) - t$.

4 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $a < b$. À quelle condition a-t-on $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\displaystyle\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| \mathrm{e}^{i\theta}$...

5 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\frac{f(x+1)}{f(x)}$.

Solution de 5 :

Appliquer le TAF à $\ln(f)$ sur $[x, x+1]$.

Réponse : e^{α}.

6 Montrer que $\displaystyle (I_n)_n = \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}\right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

Solution de 6 :

Vérifier que $I_n \to 1$ (intuitif) en majorant $|I_n - 1|$.

Puis faire une IPP dans cette majoration.

Réponse : $\displaystyle -\frac{\ln 2}{n}$.

7 **Intégrales de Wallis**

On pose $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1. Comparer I_n et J_n.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).
3. En déduire une expression de I_n.
4. Étudier la monotonie de (I_n).
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. Montrer que $I_{n-2} \sim I_n$ puis que $I_{n-1} \sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n.

8 **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On veut montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. Montrer le résultat pour f continue en utilisant des fonctions polynomiales.
3. Montrer le résultat si f en escalier, puis continue par morceaux.

On peut remplacer $\sin(nt)$ *par* $\cos(nt)$ *ou* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

9 **Lemme de Grönwall**

Soient $f, g \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$ telles que $f, g \geqslant 0$ et $C > 0$. On suppose que

$$\forall\, x \geqslant 0,\quad f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\forall\, x \geqslant 0,\quad f(x) \leqslant C\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$.

Solution de 9 : Lemme de Grönwall

Étudier $h : x \mapsto \left(C + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$.

10 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ à valeurs réelles, telle que $f(a) = 0$.

1. Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, $(f(t))^2 \leqslant (t-a)\displaystyle\int_a^t \left(f'(u)\right)^2\,\mathrm{d}u$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \left(f'(u)\right)^2\,\mathrm{d}u$.

Solution de 10 :

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Intégrale dépendant des bornes

11 Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^x \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $I(x)$ pour $x > 0$ de trois manières différentes :

1. Changement de variable $t = \frac{1}{u}$; 2. Intégration par parties ; 3. Étude de la fonction I.

12 Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ et $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f et dérivable et calculer f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
7. Tracer le graphe de f.

4. Sommes de Riemann

13 Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^3+nk^2}$
6. $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

14 Déterminer un équivalent simple de $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}$.

Solution de 14 :

Utiliser une somme de Riemann.

15 **Oral Centrale** On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose pour tout entier naturel k, $I_k=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, I_k-zI_{k-1}.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k.

   Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Qu'en penser ?

16 **Oral Centrale** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Solution de 16 : Oral Centrale

Faire apparaître $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)$ et utiliser l'uniforme continuité de f' (théorème de Heine).

5. Formules de Taylor

17 Soit $f\in\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0=\|f\|_\infty$ et $M_2=\|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall\, h>0,\ \ \forall\, x\in\mathbb{R},\ \ |f'(x)|\leqslant\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_2h}{2}$.
2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1=\|f'\|_\infty$, $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.

Solution de 17 :

1. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$.
2. Déterminer le minimum de $\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_2 h}{2}$ à l'aide d'une étude de fonction.

18 Soit $(a,b)\in R^2$ tel que $a<b$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a)=f(b)=0$.

1. Justifier l'existence de $M=\sup_{[a,b]}\left|f''\right|$.
2. Soit $x\in[a,b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x,a]$, puis sur $[x,b]$, montrer que $|f(x)|\leqslant\dfrac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

Solution de 18 :

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et a : (1)
   Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et b : (2)
   Éliminer les $f'(x)$ avec $(b-x)(1)+(x-a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

19 Soit $a\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:[a-r,a+r]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$.

Calculer la limite de $\dfrac{1}{h^3}\big(f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)\big)$ lorsque $h\to 0$.

Solution de 19 :

Appliquer trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.

Réponse : $f'''(a)$.