Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a)=f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1 CCINP 3 : Formule de Leibniz

Solution de 1 : CCINP 3 : Formule de Leibniz

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x\in\mathbb{R},\ g^{(k)}(x)=2^k e^{2x}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
   $f^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}e^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}=n!e^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.
3. Notons (P_n) la propriété :
   Si $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
   $\forall\, x\in I,\ (fg)^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

   La propriété est vraie pour $n=0$ et pour $n=1$ (dérivée d'un produit).
   Supposons la propriété vraie au rang $n\geqslant 0$.

   Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
   Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x\in I,\ (fg)^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

   Pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
   Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et

   $$\forall\, x\in I,\ (fg)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right).$$

   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

   $$\forall\, x\in I,\ (fg)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$ avec $\binom{n}{-1}=\binom{n}{n+1}=0$.

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

2 CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

Solution de 2 : CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c\in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
2. On suppose que $f'(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell$.
   Soit $h\neq 0$ tel que $x_0+h\in[a,b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et x_0+h, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et x_0+h tel que $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(c_h)h$.
   Quand $h\to 0$ (avec $h\neq 0$), on a, par encadrement, $c_h\to x_0$.
   Donc $\dfrac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=f'(c_h)\xrightarrow[x\to x_0]{}f'(x)=\ell$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\ell$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
   g est également dérivable en 0 car $\dfrac{1}{h}\big(g(h)-g(0)\big)=h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$.
   Or $h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}0$ car $\left|h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\right|\leqslant|h|$. Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.
   Cependant, $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ (car $\left|2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant 2|x|$), mais $x\longmapsto\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

3 Très classique (jusqu'à 4.)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. (Oral X)
   (a) Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b)\neq(0,0)$, $aP+bP'$ est scindé.

(b) Montrer que si $P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est scindé, $\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}$ est scindé.

Indication : utiliser l'endomorphisme $P(D)$ où D est l'endomorphisme de dérivation.

Solution de 3 : Très classique (jusqu'à 4.)

5. (a) Le résultat est immédiat si $a=0$ ou $b=0$. On suppose donc $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $b=1$ (quitte à tout diviser par b).

Si P est scindé, il s'écrit $P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)^{m_k}$ avec $x_1<\cdots<x_n$ et comme dans la question précédente, chaque x_k est racine de P' de multiplicité m_k-1, ce qui donne $\deg P-n$ racines de $aP+P'$ comptées avec multiplicité. Il en manque encore n.

L'idée astucieuse est de considérer $f : x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{ax}$ qui se dérive en $f' : x\mapsto (P'(x)+aP(x))\mathrm{e}^{ax}$ possédant les mêmes zéros que $P'+aP$.

Or f s'annule en tous les x_k et possède une limite nulle soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. En appliquant n fois le théorème de Rolle (éventuellement généralisé), on obtient n zéros distincts et distincts des x_k de f' donc les n racines qu'il nous manquait de $P'+aP$ qui est bien scindé.

Ensuite, pour (b), question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante…

On a

$$\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}=[P(D)](P)$$

Mais $P=\lambda\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc

$$[P(D)](P)=\lambda(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)(P)$$

Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k\geqslant 1$,

$$[(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)](P)$$

est scindé…

4 Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

Solution de 4 :

Applications itérées du théorème de Rolle, en remarquant que 1 et -1 sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n$.

5 Généralisations du théorème de Rolle

1. Si f est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to b]{} f(a)$, à valeurs réelles, montrer que la conclusion du théorème de Rolle tient toujours.
2. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.
3. Soient $a\in\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

6 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\operatorname{Arctan}^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

Solution de 6 : Dérivées successives d'arctangente

Utiliser une récurrence puis une généralisation du théorème de Rolle.

7 Théorème de Darboux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Solution de 7 : Théorème de Darboux

1. On suppose, sans perte de généralités, que $f(a) > 0$ et $f(a) < 0$. On aimerait adapter la preuve du théorème de Rolle en distant que le maximum que f atteint en étant continue sur le segment $[a,b]$ est atteint dans $]a,b[$ mais on ne peut pas le dire directement car f' n'est pas supposée continue donc on ne peut pas conclure de l'hypothèse car f est strictement croissante au voisinage de a et strictement décroissante au voisinage de b.

   Cependant, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a) > 0$ donc au voisinage de a, $f(x)-f(a) > 0$ soit $f(x) > f(a)$ et de même, au voisinage de b, $f(x) > f(b)$ ce qui assure que ce maximum est atteint dans $]a,b[$. La condition nécessaire d'extremum local permet bien de conclure.
2. Si, plus généralement, f dérivable sur I, $a, b \in I$ distincts et m tel que $f'(a) < m < f'(b)$, alors $g = f - m\,\mathrm{id}$ est dérivable sur $[a,b]$ et la première question nous dit que g' s'annule donc que m est atteinte par f' sur $]a,b[$.

8

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $\left|f'\right| \leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right) \end{array} \right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

9 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$.

1. Montrer que

$$\forall\, x \in [a,b],\ \ \exists\, \xi_x \in [a,b],\ \ f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.

2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ et $T(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$,
$$\left\|f-P_n\right\|_\infty \leqslant \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\|T\|_\infty.$$

Solution de 9 : Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $x\in[a,b]$, distinct des x_i (sinon, c'est immédiat, tous les ξ_x conviennent.).

Soit $\varphi\ :\ t\mapsto f(t)-P_n(t)-KT(t)$ où K est tel que $\varphi(x)=0$ (ce qui est possible car $T(x)\neq 0$ car x n'est pas l'un des x_i.)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les x_i, soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, φ est continue sur les segments et dérivables sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]a,b[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ', puis φ'', *etc* jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j\in[\![0,n+1]\!]$, φ^j admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0,n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi_x\in]a,b[$.

Or $\varphi^{(n+1)}=f^{(n+1)}-P_n^{(n+1)}-KT^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}-K(n+1)!$ car P_n est de degré au plus n et T est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}T(x).}$

10 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que
$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Solution de 10 : Égalité de Taylor-Lagrange

Poser $\varphi(x)=f(b)-\left(f(x)+f'(x)(b-x)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n+A(b-x)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(a)=0$ et appliquer le théorème de Rolle puis conclure.

Ou bien poser $\varphi(x)=f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+A(x-a)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(b)=0$ et soit appliquer le théorème de Rolle puis une hypothèse de récurrence, soit n fois le théorème de Rolle.

11

Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. **Très classique :** On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^e est de la forme $x\mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
   On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x\leqslant 0$, $\phi(x)=0$.
   Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x\mapsto\phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.

4. Si $a<c<d<b$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

Convexité

Exercices vus en cours

12 Montrer qu'une fonction convexe sur I est admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\mathring{I}$. Est-ce le cas sur I ?

13 Montrer les inégalités suivantes

1. **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_*^+$,

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\dots\cdot x_n}\leqslant\frac{x_1+\dots+x_n}{n}.$$

   Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\dfrac{1}{x_i}$?
2. $\forall x>-1,\ \ln(1+x)\leqslant x$.
3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.
4. $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$.

Parties convexes

14 **Enveloppe convexe**

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.

Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?

Solution de 14 : Enveloppe convexe

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A.

C'est bien convexe, contenant A et plus petit que tous les autres.

15 **Points extrémaux** Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :

$$\forall(a,b)\in C^2\qquad x\in[a,b]\Longrightarrow\Big(x=a\quad\text{ou}\quad x=b\Big)$$

Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n\geqslant 2$.

Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.

Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

Solution de 15 : Points extrémaux

Pour le premier, un polygone à n côté convient.

Pour le deuxième, un disque ouvert.

Pour le troisième, la partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

16 Théorème de Gauss-Lucas

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\dfrac{P'}{P}$.

Solution de 16 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$0=\sum \lambda_k(z-x_k)$ avec $\lambda_k=\dfrac{1}{|z-x_k|^2}$.

Fonctions convexes

17 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g\ :\ I\longrightarrow\mathbb{R}$ tels que $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

Solution de 17 :

Vérifier que $((1-t)f(x)+tf(y))((1-t)g(x)+tg(y))\leqslant(1-t)f(x)g(x)+tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

18

1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec $\ln$ (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

Solution de 18 :

1. Il suffit de composer l'inégalité de convexité avec la fonction croissante.
2. Composer avec l'exponentielle.

19 Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1}:f(I)\to I$.

Solution de 19 :

Elle est convexe, en passant par la définition, directement.

20 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ \forall\, x\geqslant 0,\ \ x^{n+1}-(n+1)x+n\geqslant 0.$

Solution de 20 : Inégalité de Bernoulli

$f : x \mapsto x^{n+1}$ est convexe, sa tangente en 1 a pour équation $y = (n+1)(x-1)+1$.

21 Montrer que $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$ on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

Solution de 21 :

Concavité de $\ln \circ \ln$.

22 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Solution de 22 :

Convexité de $g : x \mapsto x^2 - 2f(x)$ appliquée en $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 + \dfrac{1}{2} \cdot 1$.

23 Montrer que parmi les polygones convexes inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

Solution de 23 :

En notant θ_k les angles au centre, pour un n-gone inscrit dans un cercle de rayon R, le périmètre est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2R \sin \theta_k$ avec $\sin$ concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

24 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. *(On pourra raisonner par l'absurde.)* Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

Solution de 24 :

Sinon, si on a $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Si $z > y$, $\tau_x(y) \leqslant \tau_x(z)$ donne $f(z) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Si on a $x < y$ tels que $f(x) > f(y)$. Si $z < x$, $\tau_x(z) \leqslant \tau_x(y)$ donne $f(z) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Sur $\mathbb{R}^+$, une demi-droite convient, ou $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

25 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Solution de 25 :

Si $x > 1$, $\tau_0(1) \leqslant \tau_0(x)$ donne $f(x) \geqslant (f(1) - f(0))x + f(0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

26 **Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a < b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi\big(f(t)\big) \mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) + (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $x = f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi \ : \ x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi \ : \ x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 26 : Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP)

Indications :

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.
3. $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Corrigé :

1. Définissons, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ sur le segment $[a,b]$. En utilisant la convexité de ϕ,
$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$
Mais $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,
$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$,
ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »…On conclut donc.
2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t \in [a,b]$,
$$\phi\big(f(t)\big) \geqslant \phi(\gamma) + \big(f(t)-\gamma\big)\phi'(\gamma)$$
On intègre entre a et b ($a<b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne
$$\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t \geqslant (b-a)\phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$
En particulier, prenons $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b 1\times f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{b-a}{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

ou encore

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$

(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :

$$1 \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$

Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

27 Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_*^+,\ \ 1+\left(\displaystyle\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution de 27 :

Convexité de $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

28 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.)

29 **Fonctions mid-convexes**

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y)\in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.

(On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y)=\Big\{t\in[0,1]\mid f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\Big\}$$

contient tous les $\frac{k}{2^n}$*...)*

Solution de 29 : Fonctions mid-convexes

Indication :

Montrer l'indication par récurrence puis utiliser un argument de densité.

Corrigé :

Il n'y a qu'un sens intéressant.

Méthode 1 On voit assez facilement que si on itère l'application de

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\leqslant\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)$$

on obtient par exemple :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+y\right)\right)&\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+f(y)\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)+f(y)\right)\end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)\leqslant\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$

d'où l'idée de démontrer, par récurrence sur n :

$$\forall n\geqslant 0\ \forall k\in[\![0,2^n]\!]\ \forall(x,y)\in I^2\qquad f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)\leqslant\frac{k}{2^n}f(x)+(1-\frac{k}{2^n})f(y)$$

La récurrence n'est pas difficile à établir : il suffit de dire que, si k et k' sont dans $[\![0,2^n]\!]$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)+\left(\frac{k'}{2^n}x+(1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)+f\left(\frac{k'}{2^n}x+(1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)$$

on simplifie, on utilise la propriété à l'étape n, on en déduit la propriété à l'étape $n+1$.

Pour conclure, on utilise alors la continuité de f et la densité de l'ensemble $\left\{\frac{k}{2^n}\ ;\ 0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$ dans $[0,1]$ (qui se démontre comme dans l'exercice de topologie sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$).

Méthode 2 (Beaucoup plus graphique, mais demande des notions de topologie). On raisonne par l'absurde, en supposant que f ne soit pas convexe. On fixe alors $x<y$ dans I et $t_0\in]0,1[$ tels que

$$f\big(t_0x+(1-t_0)y\big)>t_0f(x)+(1-t_0)f(y)$$

Par continuité de f,

$$A=\{u\in[0,t_0]\ ;\ f\big(ux+(1-u)y\big)=uf(x)+(1-u)f(y)\}$$

est un fermé relatif de $[0,t_0]$ (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc un fermé (un fermé relatif A d'un fermé F est l'intersection avec ce fermé F d'un fermé G, donc est fermé). Non vide car il contient 0. Il a donc un plus grand élément (il est non vide majoré, il a donc une borne supérieure, qu'il contient car il est fermé). On appelle t_1 cet élément, et on note $x_1 = t_1 x + (1-t_1)y$ (évidemment, on ne fait que décrire ce qu'on voit sur un dessin : x_1 est l'abscisse du dernier point avant $t_0 x + (1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)),(y, f(y))]$ rencontre la courbe).

De même,

$$B = \{u \in [t_0, 1] \ ; \ f\left(ux + (1-u)y\right) = uf(x) + (1-u)f(y)\}$$

a un plus petit élément t_2, et on note $x_2 = t_2 x + (1-t_2)y$ (x_2 est l'abscisse du premier point après $t_0 x + (1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)),(y, f(y))]$ rencontre la courbe).

Sur $]t_1, t_2[$, l'application continue

$$u \mapsto f\left(ux + (1-u)y\right) - uf(x) - (1-u)f(y)$$

ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant strict d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc est strictement positif (c'est son signe en t_0). En particulier en $(t_1+t_2)/2$, ce qui donne finalement

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

30 **Branche infinie d'une fonction convexe** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.

Solution de 30 : Branche infinie d'une fonction convexe

1. Utiliser la croissance d'une fonction taux d'accroissement en un point quelconque.
   $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\tau_1(x) + \dfrac{1}{x}$ qui a une limite finie ou $+\infty$ par théorème de la limite monotone.
2. Remarquer que ℓ est aussi la limite de tout taux d'accroissement qui est croissant.
   Si $x \leqslant y$, $\tau_x(y) \leqslant \ell$ donne $f(y) - \ell y \leqslant f(x) - \ell x$ et conclure par le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.