Corrigé Devoir en Temps Limité n° 4 Centrale

SUJET MINES–CENTRALE

Problème 2 : Caractérisation des comatrices

1. Regarde les n^2 équations polynomiales qui définissent les cœfficients de $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{r} t^i A_i$: chacune a plus de r racines en étant de degré au plus r, donc

chacun des cœfficients de chacune des matrices A_i est nul.

2. (a) Chacun des cœfficients de $\mathrm{Com}(A-tI_n)$ est un cofacteur, donc plus ou moins un mineur qui est un déterminant de taille $n-1$ de type polynôme caractéristique dans lequel t apparaît au plus une fois dans chaque ligne et colonne.
La formule du déterminant ($\det M=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n-1),n-1}$) donne une combinaison linéaire de termes polynomiaux de degré au plus $n-1$, donc chaque cœfficient de $\mathrm{Com}(A-tI_n)$ est un terme polynomial de degré au plus $n-1$ en t.

On a donc bien des matrices $R_0,\dots,R_{n-1}$ telles que, pour tout $t\in\mathbb{C}$, $[\mathrm{Com}(A-tI_n)]^\intercal=\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i$.

L'unicité provient de la première question car si $R_0,\dots,R_{n-1}$ d'une part et $S_0,\dots,S_{n-1}$ d'autre part conviennent, alors pour tout $t\in\mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n-1} t^i(R_i-S_i)=0$ et donc pour tout i, $R_i=S_i$.

(b) Comme 0 est racine de $\chi_A(0)-\chi_A$, X divise $\chi_A(0)-\chi_A$ et le polynôme P est bien défini.
On a $XP=(-1)^n\big(\chi_A(0)-\chi_A\big)$ donc, en évaluant en $A^\intercal$, $A^\intercal P(A^\intercal)=(-1)^n\big(\chi_A(0)I_n-\chi_A(A^\intercal)\big)$.
Or A et $A^\intercal$ on même polynôme caractéristique car le déterminant est invariant par transposition.
Donc $\chi_A(A^\intercal)=\chi_{A^\intercal}(A^\intercal)=0_n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi,

$$A^\intercal P(A^\intercal)=(-1)^n\chi_A(0)I_n=(-1)^n\det(-A)I_n=(\det A)I_n.$$

On fait une disjonction de cas selon l'inversibilité de A (donc de $A^\intercal$) :

- Si A est inversible, $A^\intercal$ l'est et on a alors

$$P(A^\intercal)=(\det A)(A^\intercal)^{-1}=\big((\det A)A^{-1}\big)^\intercal=\mathrm{Com}\,A$$

d'après la formule de la comatrice.
- Le cas où A n'est pas inversible est vraiment difficile et demande d'utiliser les questions précédentes.
On peut toujours écrire $A^\intercal P_A(A^\intercal)=(\det A)I_n$ quelle que soit la matrice A, où on note plutôt $P=P_A$.
$A-tI_n$ est inversible pour tout t qui ne soit pas valeur propre de A qui n'en possède qu'un nombre fini.
En appliquant le cas précédent, on obtient, pour $t\notin \mathrm{Sp}\,A$, $P_{A-tI_n}((A-tI_n)^\intercal)=\mathrm{Com}(A-tI_n)$. En transposant, on obtient $P_{A-tI_n}((A-tI_n))=[\mathrm{Com}(A-tI_n)]^\intercal$ (par linéarité de la transposée et $BC^\intercal=C^\intercal B^\intercal$, on a bien pour tout polynôme Q et matrice carrée B, $Q(B)=Q(B^\intercal)$.)
Donc, d'après la question précédente, on a des matrices $R_0,\dots,R_{n-1}$ telles que

$$P_{A-tI_n}(A-tI_n)=\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i.\ (1)$$

Écrivons $\chi_{A-tI_n}=\det(XI_n-(A-tI_n))=\chi_A(X+t)$, donc $P_{A-tI_n}=(-1)^n\dfrac{\chi_A(t)-\chi_A(X+t)}{X}$.

On peut poser $\chi_A=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$. Alors $P_{A-tI_n}=(-1)^n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{t^i-(X+t)^i}{X}=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}a_it^j(X+t)^{i-1-j}$ et

$P_{A-tI_n}(A-tI_n)=(-1)^{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}a_it^jA^{i-1-j}=\sum_{j=0}^{n-1}\left((-1)^{n+1}\sum_{i=j+1}^{n}a_iA^{i-1-j}\right)t^j$. (2)

Par (1) et (2) et par la question 1, $\mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}A$ étant infini, $\operatorname{Com}A^{\intercal}=R_0=(-1)^{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_iA^{i-1}=P_A(A)$ donc en transposant, $\boxed{\operatorname{Com}A=P(A^{\intercal}).}$

3. (a) Si A est de rang n, elle est inversible et, avec la formule de la comatrice, $\operatorname{Com}A$ l'est aussi donc $\boxed{\operatorname{Com}A \text{ est de rang } n.}$

De plus, $\operatorname{Com}A=(\det A)\big(A^{-1}\big)^{\intercal}=(\det A)(A^{\intercal})^{-1}$ et comme $\operatorname{Com}A$ est inversible, on a aussi

$$\operatorname{Com}(\operatorname{Com}A)=(\det(\operatorname{Com}A))((\operatorname{Com}A)^{\intercal})^{-1}=\frac{\det(\operatorname{Com}A)}{\det A}A.$$

Or, en prenant le déterminant de la formule de la comatrice, on obtient

$$\det A\det(\operatorname{Com}A)=\det((\det A)I_n)=(\det A)^n$$

donc $\det(\operatorname{Com}A)=(\det A)^{n-1}$ (avec $\det A\neq 0$).

Finalement, $\boxed{\operatorname{Com}(\operatorname{Com}A)=(\det A)^{n-2}A.}$

(b) Si A est de rang $n-1$ et si $L_1,\dots,L_n$ sont les lignes de A, $(\operatorname{Com}A)\times L_i$ n'a pas de sens, nous allons plutôt calculer $(\operatorname{Com}A)\times L_i^{\intercal}$.

Comme $(\operatorname{Com}A)\times A^{\intercal}=(\det A)I_n=0_n$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $L_i^{\intercal}$ est la i^{e} colonne de $A^{\intercal}$ et donc $\boxed{(\operatorname{Com}A)\times L_i^{\intercal} \text{ est la } i^{\text{e}} \text{ colonne de } 0_n \text{ soit la colonne nulle.}}$

Ainsi, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $L_i^{\intercal}\in\operatorname{Ker}(\operatorname{Com}A)$. Comme $A^{\intercal}$ est de rang $n-1$, la famille de ses colonnes l'est aussi, donc $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{Com}A))\geqslant n-1$ et comme $\operatorname{Com}A$ n'est pas nulle, car au moins un des mineurs de A est non nul vu que $\operatorname{rg}A=n-1$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{Com}A))=n-1$, puis, par théorème du rang, $\boxed{\operatorname{rg}(\operatorname{Com}A)=1.}$

(c) Si $\operatorname{rg}A\leqslant n-2$, alors tous ses mineurs sont nuls donc

$$\boxed{\operatorname{Com}A=0_n.}$$

4. (a) On suppose M et N sont inversibles, donc MN l'est.

Alors $\operatorname{Com}(MN)=\det(MN)\big((MN)^{-1}\big)^{\intercal}=\det(M)\det(N)\big(N^{-1}M^{-1}\big)^{\intercal}=\det(M)\det(N)\big(M^{-1}\big)^{\intercal}\big(N^{-1}\big)^{\intercal}$ donc

$$\boxed{\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com}M\operatorname{Com}N.}$$

(b) La question revient à montrer que si $|t|$ est assez petit, alors $M(t)=M-tI_n$ et $N(t)=N-tI_n$ sont inversibles, donc $t\notin\operatorname{Sp}M\cap\operatorname{Sp}N$. Or M et N ne possèdent qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles. Il suffit de prendre $|t|$ plus petit que $\min(\alpha,\beta)$ où $\alpha=\displaystyle\min_{\lambda\in\operatorname{Sp}(M)\setminus\{0\}}|\lambda|$ si $\operatorname{Sp}(M)\neq\{0\}$ et 1 (par exemple) sinon, et $\beta=\displaystyle\min_{\lambda\in\operatorname{Sp}(N)\setminus\{0\}}|\lambda|$ si $\operatorname{Sp}(N)\neq\{0\}$ et 1 sinon.

Alors $M(t)$ et $N(t)$ sont inversibles et la question précédente donne

$$\boxed{\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big)=\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\operatorname{Com}\big(N(t)\big).}$$

(c) Les cœfficients de la comatrice sont des cofacteurs qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de produits de cœfficients de la matrices.
Donc lorsque $t\to 0$, $\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\to\operatorname{Com}M$, $\operatorname{Com}\big(N(t)\big)\to\operatorname{Com}N$ et $\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big)\to\operatorname{Com}\big(MN\big)$ en regardant cœfficients à cœfficients.
Ensuite, le produit matriciel donnant des somme de produit, on va bien avoir, toujours cœfficients à cœfficients, $\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\operatorname{Com}\big(N(t)\big)\to\operatorname{Com}M\operatorname{Com}N$.
Finalement, par unicité de la limite, en utilisant la question précédente,

$$\boxed{\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com}M\operatorname{Com}N.}$$

Autre rédaction possible : utiliser $2.a$ pour voir l'égalité de la question précédente comme une écriture
$\displaystyle\sum_{i=0}^{2n-2}t^iR_i=\sum_{i=0}^{2n-2}t^iS_i$ pour une infinité de t, et déduire de la première question que l'égalité est aussi vraie pour $t=0$, ce qui permet de conclure.

(d) Si M est une matrice de projection, $M^2=M$ et avec la question précédente,

$$\operatorname{Com}M=\operatorname{Com}\big(M^2\big)=(\operatorname{Com}M)^2$$

donc $\boxed{\operatorname{Com}M \text{ est aussi une matrice de projection.}}$

5. (a) Soit p projection canoniquement associée à A. Dans une base adaptée à

$$\mathbb{C}^n=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Ker}p=\operatorname{Ker}(p-\mathrm{id})\oplus\operatorname{Ker}p,$$

la matrice de p est $B=\begin{pmatrix}I_{n-1}&0_{n-1,1}\\0_{1,n-1}&0\end{pmatrix}$ qui est donc semblable à A.

Alors $\boxed{\chi_A=\chi_B=X(X-1)^{n-1}.}$

(b) On utilise 2.b : $\operatorname{Com}A=P(A^\intercal)$. Or ici $\chi_A(0)-\chi_A(X)=-\chi_A(X)$ donc $P=(-1)^{n-1}(X-1)^{n-1}=(1-X)^{n-1}$. On a donc, $\operatorname{Com}A=(I_n-A^\intercal)^{n-1}$. Mais $A^\intercal$ est aussi une matrice de projection car idempotente, et $I_n-A^\intercal$ qui représente la projection associée est aussi une matrice de projection donc $\boxed{\operatorname{Com}A=I_n-A^\intercal.}$

(c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $A=I_n-M^\intercal$. Alors $A^2=I_n-2M^\intercal+(M^\intercal)^2$ car I_n et $M^\intercal$ commutent.
Donc $A^2=I_n-2M^\intercal+\big(M^2\big)^\intercal=I_n-2M^\intercal+M^\intercal=I_n-M^\intercal=A$ car M est une matrice de projection.
Ainsi, A est une matrice de projection. Reste à voir que son rang est $n-1$. Or

$$\operatorname{rg}A=\dim(\operatorname{Im}A)=\dim(\operatorname{Im}(I_n-M^\intercal))=n-\dim(\operatorname{Ker}(I_n-M^\intercal))=n-\dim(\operatorname{Im}M^\intercal)=n-\operatorname{rg}M^\intercal=n-\operatorname{rg}M=n-1$$

car $M^\intercal$ est aussi une matrice de projection.

Ainsi, avec la question précédente, $\boxed{\operatorname{Com}A=M \text{ qui est une comatrice.}}$

6. (a) M est de rang 1 donc 0 valeur propre et $\dim E_0(M)=\dim\operatorname{Ker}M=n-1$.
Donc on a $a\in\mathbb{C}^*$ tel que M est semblable à $\operatorname{diag}(a,0,\dots,0)$ et donc

$$\boxed{a^{-1}M \text{ est une matrice de projection.}}$$

(b) Avec 5.c, on a A telle que $a^{-1}M = \operatorname{Com} A$, donc $M = a \operatorname{Com} A$. Soit $b \in C$ une racine $n-1^{\text{e}}$ de a (il en existe toujours, $n-1 \geqslant 2$), alors $\boxed{M = \operatorname{Com}(bA)}$ par $n-1$-linéarité des mineurs de bA.

7. (a) A est de rang 1 donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$. Comme A n'est pas diagonalisable, il n'y a pas d'autre valeur propre.
Soit u endomorphisme canoniquement associé à A, F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.
Dans une base adaptée à $\operatorname{Ker} u \oplus F = \mathbb{C}^n$, la matrice de u est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.
Mais comme 0 est la seule valeur propre, $a_n = 0$ et on a alors $B^2 = 0$, donc $u^2 = 0$ et $\boxed{A^2 = 0.}$
Comme $u^2 = 0$, $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $e_1 \neq 0$ un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} u$. alors (e_1) est une famille libre de $\operatorname{Ker} u$ qu'on complète en $(e_1, \dots, e_{n-1})$ base de $\operatorname{Ker} u$. Comme $e_1 \in \operatorname{Im} u$ donc on a $e_n \in \mathbb{C}^n$ tel que $u(e_n) = e_1$.
On vérifie que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Vect}(e_n) = \mathbb{C}^n$: on a bien $\dim \operatorname{Ker} u + 1 = n$ et si $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Vect}(e_n)$, on a $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda e_n \in \operatorname{Ker} u$ et $u(x) = 0 = \lambda u(e_n) = \lambda e_1$ avec $e_1 \neq 0$ donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$ donc la somme est bien directe.
Finalement, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et par construction, la matrice de u dans cette base est

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semblable à } A.}$$

(b) L'endomorphisme canoniquement associé à $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 1 & (0) & \\ & (0) & \ddots\ 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ est

$$v : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Alors $v^2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ donc $v^2 - v : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_n, 0, \dots, 0)$ donc $\boxed{D_1^2 - D_1 = A_1.}$
Puis $v \circ (v^2 - v) = v^3 - v^2 = v^2 - v^2 = 0$ donc $\boxed{D_1 A_1 = 0_n}$ et comme A_1 est un polynôme en D_1, elle commute avec D_1 : $\boxed{A_1 D_1 = 0_n.}$
Enfin, dans D_1, les colonnes 2 à n sont libres (colonnes de la base canonique au signe près) et la première colonne est nulle donc $\boxed{\operatorname{rg} D_1 = n-1.}$

(c) Soit $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P A_1 P^{-1}$. On pose $D = P D_1 P^{-1}$.
Alors, vu les résultats de la question précédente, $\boxed{D^2 - D = A \text{ et } AD = DA = 0.}$
Puis $\boxed{\operatorname{rg}(I_n - D)} = \operatorname{rg}(I_n - D_1) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{= 2.}$
Puis, comme dans la question précédente $v^2 = v^3$, $D_1^2 = D_1^3$ et $\boxed{D^2 = D^3.}$

(d) On a $\chi_D = \chi_{D_1} = \begin{vmatrix} X & & & & 1 \\ & X-1 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & X-1 & \\ & & & & X \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\chi_D = X^2(X-1)^{n-2}}$.

Puis avec la question 2.b, $P = (-1)^{n+1}X(X-1)^{n-2} = -X(1-X)^{n-2}$ et $\operatorname{Com} D = -D^\intercal(I_n - D^\intercal)^{n-2}$.
Mais avec la question précédente, pour tout $k \geqslant 2$, $D^k = D^2$ donc $(D^\intercal)^k = (D^\intercal)^2$ et comme I_n et $D^\intercal$ commutent, par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\operatorname{Com} D &= -\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k(D^\intercal)^{k+1} = -D^\intercal - \sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k(D^\intercal)^2 \\ &= -D^\intercal - \big((1-1)^{n-2}-1\big)(D^\intercal)^2\end{aligned}$$

et comme $n-2>0$, $\boxed{\operatorname{Com} D = -D^\intercal + (D^\intercal)^2 = A^\intercal.}$

(e) Avec les deux questions précédentes, $\boxed{A = (\operatorname{Com} D)^\intercal = \operatorname{Com}(D^\intercal),}$ cette dernière égalité découlant de la définition de la comatrice.

8. D'après 3, les comatrices sont soit inversibles, soit de rang 1, soit nulles.
Réciproquement,
   - Si A est inversible, $A = \dfrac{1}{(\det A)^{n-2}}\operatorname{Com}(\operatorname{Com} A) = \operatorname{Com}(\alpha \operatorname{Com} A)$ où α est une racine $(n-1)^{\text{e}}$ de $\dfrac{1}{(\det A)^{n-2}}$ donc A est une comatrice.
   - Si A est de rang 1, qu'elle soit ou non diagonalisable, c'est une comatrice d'après les questions 6 et 7.
   - Si A est nulle, alors $A = \operatorname{Com} 0_n$.

$\boxed{\text{Finalement, les comatrices sont exactement les matrices de rang } 0, 1 \text{ ou } n.}$

Fin