

Corrigé Devoir en Temps Limité n° 4 CCINP

Problème 2 : Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}^+$: CCINP PSI 2021

I. Deux cas particuliers

1. Soient c_1, \dots, c_n les coefficients diagonaux de C , alors $\det(I_n + C\bar{C}) = \prod_{i=1}^n (1 + |c_i|^2)$ est un réel, est supérieur à 1

et (est égal à 1) si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1 + |c_i|^2 = 1$ (si l'un d'eux était > 1 , le produit le serait

aussi) si et seulement si tous les c_i sont nuls (si et seulement si $C = 0$).

2. On écrit $C = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale.

Alors $\det(I_n + C^2) = \det(P(I_n + D^2)P^{-1}) = \det(I_n + D^2) = \det(I_n + D\bar{D})$ car D réelle. La question précédente

s'applique : $\det(I_n + C^2) \geq 1$ avec égalité si et seulement si $D = 0$ si et seulement si $C = 0$.

3. Il suffit d'appliquer le morphisme de conjugaison à la définition du déterminant

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

4. On a, comme C est à coefficients réels et avec la question précédente,

$$\det(I_n + C^2) = \det((C + iI_n)(C - iI_n)) = \det(C + iI_n) \det(C - iI_n) = \det(C + iI_n) \det(\overline{C + iI_n}) = \det(C + iI_n) \overline{\det(C + iI_n)}$$

donc $\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2 \in \mathbb{R}^+$ et $\det(I_n + C^2) = 0$ ssi $\det(C - iI_n) = 0$ ssi $i \in \text{Sp}(C)$.

II. Le cas général

1. On calcule $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\bar{C} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + C\bar{C} & -C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. En utilisant la propriété des déterminants triangulaires

par blocs, on obtient en prenant le déterminant $\det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \bar{C} & I_n \end{pmatrix} \times 1 = \det(I_n + C\bar{C})$.

2. On a directement $\text{Mat}_{(e_2, e_1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}$ avec la définition : $u(e_2) = ue_2 + se_1$ et $u(e_1) = te_2 + re_1$

3. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$, (e_1, \dots, e_{2n}) la base canonique de \mathbb{C}^n ,

alors la matrice de u dans la base $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_1, \dots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$ et la matrice de u dans la base

$(e_1, \dots, e_n, -e_{n+1}, \dots, -e_{2n})$ (libre de bonne taille) est $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}$$

4. D'après la question précédente, C_0 est semblable à $\begin{pmatrix} I_n & \bar{C} \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix} I_n & -\bar{C} \\ C & I_n \end{pmatrix} = \bar{C}_0$.

Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, et avec la question 1.3, on obtient $\chi_{C_0} = \chi_{\bar{C}_0} = \overline{\chi_{C_0}}$ donc $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$.

5. (a) Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. $C_0 \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = C_0 \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} - C\bar{X} \\ -C\bar{Y} + \bar{X} \end{pmatrix} = \Omega \left(\begin{pmatrix} X - CY \\ \bar{C}X + Y \end{pmatrix} \right) = \Omega \left(C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$.

(b) Vérification immédiate : pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $\Omega \circ \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, donc $\Omega^2 = -\text{id}$.

(c) Se vérifie directement avec la définition de Ω .

6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = 0$ donc $\lambda X - \mu \bar{Y} = 0$ (1) et $\lambda Y + \mu \bar{X} = 0$ (2). Alors $\bar{\lambda}(1) + \mu(2)$ donne $(|\lambda|^2 + |\mu|^2)X = 0$ et $-\mu(1) + \bar{\lambda}(2)$ donne $(|\lambda|^2 + |\mu|^2)Y = 0$. Or soit $X \neq 0$, soit $Y \neq 0$ donc

$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$ ce qui donne $\lambda = \mu = 0$ car on somme des nombres positifs : $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est libre.

Soit $P = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$. On a, $\Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \in P$ et $\Omega \left(\Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right) = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in P$ en utilisant 5.b, donc

P est stable par Ω .

7. Un vecteur de $E \cap \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ s'écrit $U = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \beta \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \in E$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

En composant par Ω , avec la question 5, on obtient $\Omega(U) = \bar{\alpha} \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \bar{\beta} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$ par stabilité de E .

Mais alors $\bar{\alpha}U - \mu\Omega(U) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$. Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \notin E$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi, $E \cap \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.

8. Soit $U \in F_\lambda$. On montre que $\Omega(U) \in F_{\bar{\lambda}}$.

Or $(\bar{\lambda}I_{2n} - C_0)\Omega(U) = \bar{\lambda}\Omega(U) - C_0\Omega(U) = \Omega(\lambda U) - \Omega(C_0U)$ par la question 5. En observant la définition de Ω , on peut alors écrire, $(\bar{\lambda}I_{2n} - C_0)\Omega(U) = \Omega(\lambda U - C_0U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)U)$.

En réitérant $\alpha_{\bar{\lambda}}$ fois, on obtient $(\bar{\lambda}I_{2n} - C_0)^{\alpha_{\bar{\lambda}}}\Omega(U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_{\bar{\lambda}}}U)$.

Or $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$ d'après 4, donc $\alpha_\lambda = \alpha_{\bar{\lambda}}$ et $(\bar{\lambda}I_{2n} - C_0)^{\alpha_{\bar{\lambda}}}\Omega(U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}U) = \Omega(0) = 0$ car $U \in F_\lambda$ et par linéarité.

Finalement, $\Omega(F_\lambda) \subset F_{\bar{\lambda}}$ et comme, par 5.b, Ω est un isomorphisme, $\dim \Omega(F_\lambda) = \dim F_\lambda = \alpha_\lambda = \alpha_{\bar{\lambda}} = \dim F_{\bar{\lambda}}$ en utilisant le résultat admis.

Ainsi, $\Omega(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.

9. Soit $\lambda \in \text{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$. D'après la question précédente, F_λ est stable par Ω .

Soit $F_\lambda = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et F_λ de dimension paire $(2n)$, soit on peut trouver $U \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus F_\lambda$.

Alors d'après 6 et 7, on a un plan P_1 stable par Ω tel que F_λ et P_1 sont en somme directe.

Soit $E_1 = F_\lambda \oplus P_1$. E_1 est stable par Ω car F_λ et P_1 le sont et de dimension $\dim F_\lambda + 2$. Soit $E_1 = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et F_λ est de dimension paire $(2n-2)$, soit ce n'est pas le cas et on peut réitérer.

Par récurrence, tant que le procédé ne s'arrête pas, on construit des plans P_1, P_2, \dots, P_k tels que $E_k = F_\lambda \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_k$ est un sous-espace stable par Ω et P_1, \dots, P_k des plans stables.

Comme $\dim E_k = \dim F_\lambda + 2k$ est strictement croissante et majorée par $2n$, le procédé s'arrête, donc on a un k tel que $E_k = F_\lambda \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_k = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et donc $\dim F_\lambda = 2n - 2k$ est paire.

10. Comme χ_{C_0} est scindé, $\det C_0 = \prod_{\lambda \in \text{Sp } C_0} \lambda^{\alpha_\lambda}$.

Or dans ce produit, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'après la question précédente, $\lambda^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et comme $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{\lambda} \in \text{Sp } C_0$ avec $\alpha_{\bar{\lambda}} = \alpha_\lambda$ et en rassemblant λ et $\bar{\lambda}$ on obtient $|\lambda|^{2\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$.

Finalement, $\det C_0 \in \mathbb{R}^+$.

Remarque : avec un résultat vu en TD, on obtient bien $\det C_0 = \det(I_n + C\bar{C})$ car I_n est inversible et commute avec \bar{C} .

Fin