E3A MPI 2023 : un corrigé

28 novembre 2023

EXERCICE 2

1. $\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}.}$

---

2. $\boxed{t^x = \mathrm{e}^{x \ln t} > \mathrm{e}^{y \ln t} = t^y}$ car $\ln t < 0$.

---

3. $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.}$

---

4. $\boxed{\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1}$ et on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}(n)$: « $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$ ».
En effet, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si on fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)!$ ce qui établit la récurrence.

5.

5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \in]0,1] \mapsto t^{t^x} = \mathrm{e}^{t^x \ln t} = \mathrm{e}^{\exp(x \ln t) \ln t}$, fonction continue et positive sur $]0,1]$.
Puis $\sqrt{t} f_x(t) = e^{(\exp(x \ln t)+1/2) \ln t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ car $t^x = \exp(x \ln t)$ tend vers $+\infty$, 1 ou 0 suivant si $x < 0$, $x = 0$ ou $x > 0$.
Dans tous les cas, $f_x(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ lorsque $t \to 0$ avec $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable sur $]0,1]$ par critère de Riemann, avec $\frac{1}{2} < 1$.
Par comparaison, f_x l'est aussi et $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

5.2. Si $x < y$ et $t \in]0,1[$, d'après 2, $t^x \geqslant t^y$ puis $t^{t^x} \leqslant t^{t^y}$.
Donc, par croissance de l'intégrale généralisée, $\boxed{F \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

5.3. On a alors bien pour $x \geqslant 0$, $\boxed{F(x) \geqslant F(0) = \frac{1}{2}.}$

5.4. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre à

$$f : (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,1] \mapsto f_x(t) = t^{t^x}.$$

H1 Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations (continuité de l'exponentielle, principalement).

H2 : Domination Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,1]$,

$$|f(x,t)| = t^{t^x} = \mathrm{e}^{\exp(x \ln t) \ln t} \leqslant 1 = \phi(t)$$

avec ϕ positive, continue, intégrable sur $[0,1]$ donc sur $]0,1]$.

(Le programme ne nous oblige pas à signaler que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$)

Donc $\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

5.5. La domination de la question précédente nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$ (on intègre sur $]0,1[$ pour facilité le calcul de limite) :

H1 Pour tout $t \in]0,1[$,

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{\exp(x \ln t) \ln t} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{\exp(x \ln t) \ln t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

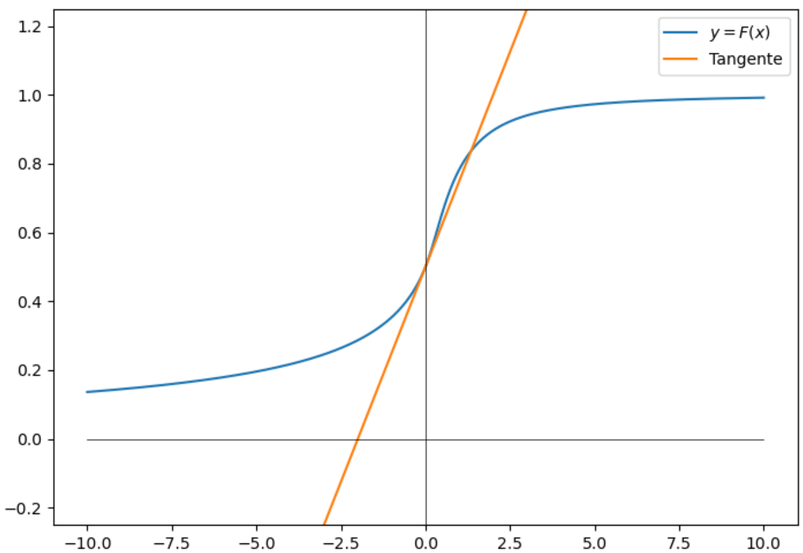
H2 : Domination La même qu'à la question précédente.

(Le programme ne nous oblige pas à signaler que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$ sont continues par morceaux sur $]0,1[$)

Alors $\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \int_0^1 0 = 0 \text{ et } F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^1 1 = 1.}$

5.6.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1



6.

6.1. Soit $t \in]0,1]$. Alors par croissances comparées, $0 \leqslant g_n(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $\frac{1}{n^2}$ terme général positif de série convergente par critère de Riemann, donc $\sum g_n(t)$ converge.

Ainsi, $\boxed{\sum g_n \text{ converge simplement sur }]0,1].}$

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule (dans $[0, +\infty]$ pour le moment)

$$\int_0^1 |g_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^{nx} \left|\ln(t)\right|^n \,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $u = -\ln t$. On a alors

$$\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{n!}\int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-nxu}u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(nx+1)u}u^n\,\mathrm{d}u.$$

On effectue le changement de variable $y = (nx+1)u$. On a alors

$$\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!(nx+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}y^n\,\mathrm{d}y$$

soit encore $\boxed{\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)}{n!(nx+1)^{n+1}}.}$

6.3. On applique alors le théorème d'intégration terme à terme (interversion série-intégrale) par convergence N_1. Vu

H1 la question **6.1**,

H2 la question **6.2** donne l'intégrabilité des g_n car $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$,

H3 la question **6.2** et la question **4** donnent

$$\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(nx+1)^{n+1}} \sim \frac{1}{n^n x^n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

par croissance comparées, donc, par comparaison de terme généraux positifs, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut donc intervertir (tout étant convergeant) :

$$F(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^x\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t^x\ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{nx}\ln t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{\displaystyle F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}}$ avec un calcul similaire à celui de la question précédente, l'absence de valeur absolue autour du $\ln t$ provocant l'apparition d'un $(-1)^n$ par le premier changement de variable.

Fin du corrigé