# CCINP Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé

Jérémy Larochette – Lycée Carnot – Dijon

Mai 2021

## EXERCICE I

**Q1.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : t \in ]0,1] \mapsto t^{2k}\ln t$. C'est une fonction continue sur $]0,1]$ et $|f_k(t)| = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $t^{2k+1/2}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonction positives, $\boxed{f_k \text{ est intégrable sur } ]0,1].}$

Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1}\int_\varepsilon^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln\varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right).$$

Donc, en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 et par croissances comparées, $\boxed{\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}.}$

---

**Q2.** $f$ est continue et positive sur $]0,1[$ et, de nouveau, $f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t}f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc par comparaison de fonctions positives, $f$ est intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.

Puis, avec $t = 1+h$, $f(t) = f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{(2+h)h} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \frac{1}{2}$ donc $f$ est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\frac{1}{2},1[$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur } ]0,1[.}$

Puis, pour $t \in ]0,1[$, $t^2 \in ]-1,1[$ donc $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t.$

Comme les $f_k$ sont à valeurs positives, on peut intervertir quitte à travailler dans $[0,+\infty]$ (mais on sait déjà ici que les termes sont en fait finis), la convergence simple de la série des $f_k$ ayant déjà été vue.

On a alors $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (qui est positif, ce qui est rassurant).

Or, si $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre $N$ vers $+\infty$, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et finalement $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.}$

(On peut éviter de repasser aux sommes partielles en appliquant le théorème de sommation par paquets avec $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$ dans le cas réel positif, qui ne demande aucune hypothèse quitte à travailler dans $[0,+\infty]$ et permet d'écrire directement que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ mais attention : pour passer à la différence, bien dire que les termes sont en fait finis par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.)