Devoir en Temps Limité n° 4

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- **Deux sujets au choix :**
  type E3A – CCINP ou (exclusif) type CENTRALE – MINES.
  Choisissez dès le départ un sujet, et ne changez pas d'avis.
- QUE LA FORCE SOIT AVEC VOUS.

SUJET E3A – CCINP

Exercice : Un calcul d'intégrale

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(t)=\dfrac{\ln t}{t^2-1}$.

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k=\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t$.
2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}$.

   On pourra utiliser librement que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Problème 1 : Étude d'une intégrale à paramètre

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a>0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

   $(A):\mathrm{e}^{b\ln(a)}$ $\qquad(B):\mathrm{e}^{a\ln(b)}$ $\qquad(C):\mathrm{e}^{\ln(a)\ln(b)}$.

2. Soient x et y deux réels tels que $x<y$ et t un réel de $]0,1[$. Comparer t^x et t^y.
3. Donner, sans démonstration, l'expression de la somme d'une série exponentielle réelle et donner son domaine de validité.
4. On considère la fonction Γ définic par $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   On admet que cette fonction est définie sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :
   $$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$
   Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

****

5. Pour $x\in\mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :
   $$F(x)=\int_0^1 t^{t^x}\,dt$$
   où, comme il est d'usage, $t^{t^x}=t^{(t^x)}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de F.
   (b) Déterminer le sens de variation de F.
   (c) Démontrer que pour tout x réel positif, on a $F(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$.
   (d) Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.
   (e) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)$.
   Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.
   (f) Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0)=\dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x=0$.
6. Soit x un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0,1]$ par $g_n(t)=\dfrac{t^{nx}\ln^n(t)}{n!}$.
   (a) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et donner sa somme.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1\left|g_n(t)\right|\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.
   (c) Établir enfin que l'on a :
   $$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}$$

Problème 2 : Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à deux cas particuliers.

On montre d'abord que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \geqslant 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C, où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C, c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C.

On considère ensuite le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbb{R}^+$.

La **Partie II** est consacrée au cas général.

On montre que pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$.

I. Deux cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}$ et que $\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
2. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Démontrer que $\det\left(I_n + C^2\right) \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
3. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.
4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :
$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$
En déduire que $\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbb{R}^+$ et que $\det\left(I_n + C^2\right) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

II. Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on démontre que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$. Seule la question 3. de la partie I sera utile pour la suite.

1. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :
$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = \det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$
On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$
2. Soient $(r,s,t,u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).
3. Soit $(R,S,T,U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.
4. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.

On considère l'application $\Omega : \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :
$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

5. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :
   (a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;
   (b) $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;
   (c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$
6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.
Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.
7. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.
Montrer que :
$$E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \mathrm{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$:
$$F_\lambda = \mathrm{Ker}((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}).$$
On admet, pour traiter la question 10. que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$.
9. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.
10. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbb{R}^+$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

SUJET CENTRALE – MINES

Problème 1 : Étude d'une intégrale

L'objet de ce problème est principalement l'étude de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{e^{\pi t} - 1} dt$$

Première partie

Le but de cette partie est d'établir une expression de l'intégrale I et d'étudier la fonction φ définie par la relation suivante :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{e^{\pi t} - 1}.$$

Variations de la fonction φ

1. Déterminer un éventuel prolongement par continuité de la fonction φ en 0 .
2. Étudier les variations de la fonction φ sur la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$; il peut être intéressant d'introduire la fonction auxiliaire ψ définie par la relation suivante :

$$\psi(t) = \frac{1 - e^{-\pi t}}{1 + t^2} - \pi \operatorname{Arctan} t$$

En déduire la borne supérieure de la fonction φ sur D.

Existence et expressions de l'intégrale I

3. Justifier l'existence de l'intégrale I définie par la relation suivante :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{e^{\pi t} - 1} dt$$

4. Démontrer les deux relations suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t \, dt \quad ; \quad I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1 + t^2} dt$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'introduire une fonction f de façon à transformer les expressions obtenues précédemment pour l'intégrale I et à pouvoir calculer l'intégrale I. Soit f la fonction définie par la relation suivante :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2} dt$$

Propriétés de la fonction f

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Préciser l'ensemble dans lequel la fonction f est continue ; quelle est sa limite lorsque le réel x tend vers l'infini ?
6. Dans quel ensemble est-elle deux fois continûment dérivable ? Établir une relation simple entre la fonction f et sa dérivée seconde f'' sur la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$.

Deux intégrales

Soit a un réel strictement positif $(a > 0)$. Étant donné un réel X supérieur ou égal à $a (X \geqslant a)$, soient $S(X)$ et $C(X)$ les deux intégrales suivantes :

$$S(X) = \int_a^X \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad C(X) = \int_a^X \frac{\cos t}{t} dt$$

7. Existe-t-il une limite à chacune des expressions $S(X)$ et $C(X)$, lorsque le réel X croit vers l'infini ?

   Soient g et h les deux fonctions définies sur la demi-droite ouverte D par les relations suivantes :

$$g(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{X \to \infty} \int_x^X \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad h(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \lim_{X \to \infty} \int_x^X \frac{\cos t}{t} dt$$

Une expression de la fonction f

8. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction f dans la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$.

   On pourra vérifier que la fonction $g \times \cos - h \times \sin$ est solution.
9. En déduire les deux expressions ci-dessous de la fonction f :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u + x} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{1 + t} dt$$

Troisième partie

10. En utilisant les résultats établis dans les première et deuxième parties, démontrer la relation suivante :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi + u} du$$

11. Démontrer le résultat suivant :

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(u + \pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) du$$

Problème 2 : Caractérisation des comatrices

Soit n un entier au moins égal à 3. Si $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{Com}A$ sa comatrice, de terme général C_{ij}, cofacteur de a_{ij} dans A. On rappelle les relations :

$$A\times(\operatorname{Com}A)^\intercal=(\operatorname{Com}A)^\intercal\times A=(\det A)\cdot I_n.$$

On confond polynôme et fonction polynomiale associée, et on note $\chi_A=\det(XI_n-A)$.

On rappelle que le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, c'est-à-dire que $\chi_A(A)=0_n$.

On se propose de caractériser les matrices qui sont des comatrices.

1. Soient $A_0,A_1,\ldots,A_r$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $t\in\mathbb{C}$, $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{r}t^iA_i$.

   Montrer que si φ s'annule pour plus de r valeurs, alors les A_i sont toutes nulles.
2. (a) Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer l'existence et l'unicité des matrices $R_0,\ldots,R_{n-1}$ telles que :

   $$\forall\,t\in\mathbb{C},\ [\operatorname{Com}(A-tI_n)]^\intercal=\sum_{i=0}^{n-1}t^iR_i.$$

   (b) Soit P le polynôme défini par $P(t)=(-1)^n\dfrac{\chi_A(0)-\chi_A(t)}{t}$ pour $t\in\mathbb{C}^*$.

   Démontrer $\operatorname{Com}A=P(A^\intercal)$.
3. (a) Si A est de rang n, montrer que $\operatorname{Com}A$ est de rang n. Que vaut $\operatorname{Com}\big(\operatorname{Com}A\big)$?

   (b) Si A est de rang $n-1$ et si $L_1,\ldots,L_n$ sont les lignes de A, calculer $(\operatorname{Com}A)\times L_i^\intercal$ pour tout i et vérifier que le rang de $\operatorname{Com}A$ est 1.

   (c) Montrer que si le rang de A est au plus $n-2$, alors $\operatorname{Com}A$ est nulle.
4. Soient M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Si M et N sont inversibles, montrer que $\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com}M\operatorname{Com}N$.

   (b) Soient $M(t)=M-tI_n$ et $N(t)=N-tI_n$ pour t complexe. Montrer que, pour tout t de module assez petit, $\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big)=\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\operatorname{Com}\big(N(t)\big)$.

   (c) Vérifier que, pour M et N quelconques, $\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com}M\operatorname{Com}N$.

   (d) Si M est une matrice de projection, que peut-on dire de $\operatorname{Com}M$?
5. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, matrice de projection de rang $n-1$.

   (a) Déterminer χ_A.

   (On pourra utiliser une base de Im A et une base de Ker A.)

   (b) Montrer que $\operatorname{Com}A=I_n-A^\intercal$.

   (c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que M est une comatrice.
6. Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, M diagonalisable de rang 1.

   (a) Montrer l'existence de λ complexe tel que λM est une matrice de projection.

   (b) Montrer que M est une comatrice.
7. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, A non diagonalisable de rang 1.

   (a) Montrer que $A^2=0$ et que A est semblable à $A_1=(\alpha_{ij})$, avec $\alpha_{1n}=1$ et $\alpha_{ij}=0$ sinon.

   (b) Soit $D_1=(\beta_{ij})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\beta_{ii}=1$ pour $i=2,\ldots,n-1$, $\beta_{1n}=-1$ et $\beta_{ij}=0$ dans tous les autres cas.

   Calculer $D_1^2-D_1$, D_1A_1 et A_1D_1.

   Que vaut le rang de D_1 ?

   (c) Montrer l'existence de D de rang $n-1$ telle que $D^2-D=A$, $AD=DA=0$ et I_n-D est de rang 2.

   Comparer D^3 et D^2.

   (d) Montrer que $\chi_D=X^2(X-1)^{n-2}$ et en déduire $\operatorname{Com}D$.

   (e) Montrer que A est une comatrice.
8. Caractériser les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont des comatrices.

FIN DE L'ÉNONCÉ