Devoir Libre n° 9 : Sujet E3A

Partie I : On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^x\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $s>-1$, l'intégrale $J_s=\displaystyle\int_0^1 t^s\ln(t)\mathrm{d}t$ existe et donner sa valeur.
2. **Étude de la fonction H**
   (a) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H=]-1,+\infty[$.
   (b) Montrer que H est monotone sur D_H.
   (c) Montrer que pour tout réel $\alpha>0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{t^\alpha(\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0,1]$.
   (d) Démontrer que H est de classe C^1 sur D_H. Retrouver alors la monotonie de H.
   (e) Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}H(x_n)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}H(x)$.
   (f) Démontrer que $\forall x>-1,\ H(x)-H(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2}$.
   (g) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
   (h) Soit $x>-1$.
      i. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{1}{(x+k)^2}$.
      ii. Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}+H(x+n)$.
      iii. En déduire que $H(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$ puis $H(0)$ et $H(1)$.

Partie II

1. Prouver que pour tout $x>-1$ et tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{(x+k+1)^2}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{(x+t)^2}\leqslant\frac{1}{(x+k)^2}$.
2. Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=H(n)$.
   (a) Etudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}(-1)^n u_n$
   (b) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n=\int_0^1\frac{\ln(v)}{v^2-1}\mathrm{d}v$
   (c) Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Partie III : Pour tout entier naturel $k\geqslant2$, on note $Z_k=\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^k}$.

1. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 t^p[\ln(t)]^q\mathrm{d}t$ et on admettra que cette intégrale existe.
   (a) Justifier que si $q\geqslant1$, $I_{p,q}=-\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}$.
   (b) En déduire la valeur de $I_{p,q}$.
2. (a) Justifier l'existence pour tout $n\in\mathbb{N}$ de $B_n=\displaystyle\int_0^1\frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}\mathrm{d}t$.
   (b) Exprimer B_n à l'aide des intégrales $I_{p,q}$. *On pourra utiliser la série de terme général t^p.*
   (c) Prouver enfin que $\forall n\in\mathbb{N},\ B_n=(-1)^n(n+1)!Z_{n+2}$.
3. En déduire alors que $\forall x\in]-1,1[,\ H(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)Z_{k+2}x^k$.