# DL 8 – Sujet CCINP

Dans tout le problème, $\alpha$ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

## Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

**Q1.** Démontrer que $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

**Q2.** Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

**Q3. 1re tentative**

Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

**Q4. 2e tentative**

Pour tout $x\in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

**Q5.** En déduire que :

$$I(\alpha)+J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\alpha x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right).$$

**Q6.** Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$



## Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

et

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t..$$

**Q7.** Démontrer que $\Gamma$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

**Q8.** Démontrer que $f_\alpha$ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

**Q9.** Démontrer que $f_\alpha$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

**Q10.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

**Q11.** Démontrer que $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

## Partie III - Vers la formule des compléments

**Q12.** Pour tout $x\in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x)-f_\alpha'(x)=\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

**Q13.** Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x)=\Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que $g_\alpha$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y-y'=\dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x\in]0,+\infty[,\ f_\alpha(x)=g_\alpha(x)$.

**Q14.** En déduire que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t=\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

**Q15.** Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

**Q16.** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

# FIN