Corrigé Maths 1 MP Centrale 1998

I.A – Comme $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ (f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}\geqslant 0$, $\boxed{f+g \text{ est AM.}}$

Comme $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et, d'après la formule de Leibniz,$\forall n\in\mathbb{N},\ (f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\geqslant 0$,

$\boxed{f\times g \text{ est AM.}}$

Si f,g sont CM sur $]a,b[$, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ (-1)^n(f+g)^{(n)}=(-1)^n f^{(n)}+(-1)^n g^{(n)}\geqslant 0,$$

$\boxed{f+g \text{ est CM.}}$

Puis $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et, d'après la formule de Leibniz,

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ (-1)^n(f\times g)^{(n)}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{(k)}(-1)^{n-k}g^{(n-k)}\geqslant 0,$$

$\boxed{f\times g \text{ est CM.}}$

I.B – Soit f est une fonction AM sur $]a,b[$. Alors $\mathrm{e}^f\in\mathscr{C}^\infty(]a,b[)$.

Montrons par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$ que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \left(\exp f\right)^{(n)}\geqslant 0$.

Si $n=0$, $\exp f\geqslant 0$.

Si, l'hypothèse est vraie jusqu'à un $n\geqslant 0$, alors

$$\left(\exp f\right)^{(n+1)}=\left((\exp f)'\right)^{(n)}=\left(f'\exp f\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}(\exp f)^{(k)}\geqslant 0$$

d'après le caractère AM de f et l'hypothèse (forte) de récurrence. Ce qui établit la récurrence.

Finalement, $\boxed{\exp f \text{ est AM.}}$

I.C – Comme f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$, g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-b,-a[$ par opérations.

De plus, par récurrence sur n, on a $\forall\, x\in]-b,-a[,\ \ g^{(n)}(x)=(-1)^n f^{(n)}(-x)$ soit $\forall\, x\in]a,b[,\ \ f^{(n)}(x)=(-1)^n g^{(n)}(-x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est AM sur }]a,b[\text{ si et seulement si } g \text{ est CM sur }]-b,-a[.}$

I.D.1) On a $-\ln$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et on démontre par récurrence (il faut la poser !!) que si $n\geqslant 1$, $(-\ln)^{(n)}: x\mapsto(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

On a donc $(-1)^0(-\ln)^{(0)}=-\ln\geqslant 0$ sur $]0,1[$ et si $n\geqslant 1$,

$$(-1)^n(-\ln)^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{x^n}\geqslant 0$$

sur $]0,1[$. D'où $\boxed{-\ln \text{ CM sur }]0,1[.}$

I.D.2)

(i) $f>0$, $g=\ln f: x\mapsto-\frac{1}{2}(\ln(1+x)+\ln(1-x))$. $\boxed{g\in\mathscr{C}^\infty(]0,1[)}$ par opérations.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad g^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{(-1)^n}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n}\right)}$$ comme à la question précédente.

(ii) $g \geqslant 0$ car $\forall\, x \in]0,1[,\quad f \geqslant 1$.

Puis, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!((1+x)^n + (-1)^n(1-x)^n)}{2(1-x^2)^n} \geqslant 0$: c'est immédiat si n est pair, et c'est dû à la croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$ sinon.

Donc g est AM sur $]0,1[$, puis, d'après 3., $\boxed{f \text{ est AM sur }]0,1[.}$

I.D.3) $\mathrm{Arcsin} \geqslant 0$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\mathrm{Arcsin}' = f$. Vu la question précédente, $\boxed{\mathrm{Arcsin} \text{ est AM sur }]0,1[.}$

I.D.4) tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, par récurrence, $\tan^{(0)} = \tan = p_0(\tan)$ avec $p_0 = X \in \mathbb{N}[X]$. Si pour un $n \geqslant 0$, $\tan^{(n)} = p_n(\tan)$ avec $p_n \in \mathbb{N}[X]$,

$$\tan^{(n+1)} = \left(\tan^{(n)}\right)' = \tan' p_n'(\tan) = (1+\tan^2)p_n'(\tan) = p_{n+1}(\tan)$$

avec $p_{n+1} = (1+X^2)p_n' \in \mathbb{N}[X]$ car la dérivée et le produit de polynômes à cœfficients entiers naturels sont bien des polynômes à cœfficients entiers naturels. Ce qui établit la récurrence.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \tan^{(n)} = p_n(\tan) \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ où } p_n \in \mathbb{N}[X].}$

Comme $\tan \geqslant 0$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\boxed{\tan \text{ est AM sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.}$

I.E.1) $f \geqslant 0$ et $f' \geqslant 0$ donc f est croissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda = \lim_{a^+} f.}$$

$f \in \mathscr{C}^1(]a,b[)$, $f \in \mathscr{C}^0([a,b[)$ et comme ci-dessus, f' a une limite en a^+. D'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ (limite de la dérivée), $\boxed{f \in \mathscr{C}^1([a,b[).}$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } a \text{ et } f' \text{ est continue à droite en } a.}$

I.E.2) On applique le raisonnement qui précède par récurrence car chaque $f^{(n)}$ est encore AM sur $]a,b[$.

$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty([a,b[) \text{ et pour tout } n\ f^{(n)}(a) \geqslant 0}$ par passage des inégalités à la limite.

$\boxed{\text{C'est faux en } b}$ en général : par exemple pour tan en $\dfrac{\pi}{2}$.

I.F.1) μ est croissante car, par linéarité et positivité,

$$f \leqslant g \Longrightarrow g - f \geqslant 0 \Longrightarrow \mu(g-f) \geqslant 0 \Longrightarrow \mu(f) \leqslant \mu(g).$$

Comme $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, $-\mu(|f|) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(|f|)$ donc $\boxed{\left|\mu(f)\right| \leqslant \mu\left(|f|\right)}$.

I.F.2) Comme $f \leqslant \|f\|_\infty f_0$, par croissance et linéarité $\boxed{\mu(f) \leqslant \mu(f_0)\|f\|_\infty.}$

I.F.3) On a, pour tout x, $e_x \geqslant 0$ donc $\tilde{\mu}(x) = \mu(e_x) \geqslant 0$. Donc $\boxed{\tilde{\mu} \text{ est positive.}}$

Puis

$$x \leqslant y \Longrightarrow e_x \geqslant e_y \Longrightarrow \tilde{\mu}(x) \geqslant \tilde{\mu}(y)$$

donc $\boxed{\tilde{\mu} \text{ est décroissante.}}$

Si $x \leqslant y$,

$$0 \leqslant e^{-xt} - e^{-yt} = \int_x^y t e^{-ut} \, \mathrm{d}u \leqslant y e^{-xt}(y-x) \leqslant b e^{-a^2}(y-x),$$

donc $\forall x, y$, $\|e_x - e_y\|_\infty \leqslant b e^{-a^2}|x-y|$.

Par suite, $|\tilde{\mu}(x) - \tilde{\mu}(y)| \leqslant \mu(f_0)\|e_x - e_y\|_\infty \leqslant \mu(f_0) b e^{-a^2}|x-y|$, donc $\tilde{\mu}$ est lipschitzienne, donc $\boxed{\text{continue.}}$

I.F.4) On a que

$$x \leqslant y \Longrightarrow e_{n,x} \geqslant e_{n,y} \Longrightarrow \varphi(x) \geqslant \varphi(y).$$

Puis, par convexité de l'exponentielle, on a pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^{-u} \geqslant 1-u$. Donc

$$0 \leqslant e^{-u} - 1 + u = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n!} \leqslant u^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{(n+2)!} \leqslant u^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{2n!} = \frac{u^2}{2} e^{|u|}$$

car $(n+2)! \geqslant 2n!$.
Or

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\mu(e_{n+1,x}) = \mu(f)$$

avec $f(t) = t^n e^{-xt}(e^{-ht} - 1 + ht)$.
Comme pour $t \in [a,b]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant t^n e^{-xt} e^{|h|t} h^2 t^2/2 \leqslant C h^2$, où C est une constante,

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mu(e_{n+1,x}) \right| \leqslant \mu(f_0) C |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

donc $\boxed{\varphi \text{ est dérivable et } \varphi'(x) = -\mu(e_{n+1,x}).}$

I.F.5) Par récurrence, $\tilde{\mu}$ est de classe C^n et $\tilde{\mu}^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \mu(e_{n,x})$. Il est du signe de $(-1)^n$, donc $\boxed{\tilde{\mu} \text{ est CM.}}$

I.F.6) Si on prend $\mu_1(f) = f(c)$ (où $c \in [a,b]$), on obtient $\boxed{\tilde{\mu}_1 : x \mapsto e^{-cx}.}$

Si on prend $\mu_2(f) = \displaystyle\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$, on obtient $\boxed{\tilde{\mu}_2 : x \mapsto \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}.}$

Partie II

II.A.1) Par Taylor avec reste intégral, f étant de classe $\mathscr{C}^{n+1}$,

$$R_n(f,x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) \mathrm{d}u.$$

$f^{(n+1)}$ étant croissante, si $0 \leqslant x \leqslant y$, on déduit de la 2ème égalité que $\dfrac{R_n(f,x)}{x^n} \leqslant \dfrac{R_n(f,y)}{y^n}$.

Par formule de Taylor-Young, $\boxed{R_n(f,x)/x^n \text{ tend vers 0 lorsque } x \text{ tend vers 0.}}$

II.A.2) D'après A.1, $R_n(f,x) \geqslant 0$ sur $[0,b[$ donc la somme partielle de la série à termes positifs $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est majorée par $f(x)$, $\boxed{\text{elle converge donc et sa somme } g(x) \text{ est inférieure à } f(x).}$

II.A.3) Pour $x \in [0,b[$, on choisit y tel que $x < y < b$. On a $0 \leqslant \frac{R_n(f,x)}{x^n} \leqslant \frac{R_n(f,y)}{y^n} \leqslant \frac{f(y)}{y^n}$, d'où

$$0 \leqslant R_n(f,x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y),$$

d'où $R_n(f,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\boxed{g(x) = f(x).}$

II.A.4) Si $x \in]-r,0[$, $|R_n(f,x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n |f^{(n+1)}(xu)|\, du \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(|x|u)|\, du = R_n(f,|x|)$, donc $R_n(f,x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc

$$\boxed{f \text{ est somme de sa série de Taylor sur }]-r,r[.}$$

II.B – On pose $h(x) = f(x+a)$ pour $x \in [0,b-a[$. h est AM donc somme de sa série de Taylor sur $[0,b-a[$, ce qui donne $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ sur } [a,b[.}$

II.C –

- Chacun des termes de la somme précédente est positif, donc si $f(x_0) = 0$, tous les termes de la somme calculés en x_0 sont nuls, d'où $\forall n,\ f^{(n)}(a) = 0$, donc en réutilisant B, $\boxed{f \text{ est nulle sur }]a,b[.}$
- $f^{(p)}$ est AM, donc si elle admet un zéro, elle est nulle, donc f est $\boxed{\text{polynomiale de degré} \leqslant p-1.}$

  Inversement, toute fonction polynomiale de la forme $\sum_{k=0}^{p-1} c_k (x-a)^k$, avec $\forall k,\ c_k \geqslant 0$, convient.

Partie III

III.A – $\boxed{\Delta_h^n(f) \text{ est définie sur }]a, b-nh[}$ (cet intervalle pouvant être vide).

III.B – $\Delta_h = T_h - id$. Les deux endomorphismes T_h et id commutent, donc par formule du binôme,

$$\Delta_h^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T_h^k,$$

$\boxed{\text{ce qui donne le résultat}}$ car $T_h^k(f)(x) = f(x+kh)$.

III.C – On remarque que si f est AM, alors $\Delta_h(f)$ est AM (sur son intervalle de définition). On en déduit par récurrence que $\Delta_h^n(f)$ est AM pour tout entier n, en particulier $\boxed{\Delta_h^n(f) \text{ est une fonction positive.}}$ (inutile d'utiliser l'indication)

III.D

III.D.1 $\boxed{f \geqslant 0}$ (prendre $n = 0$, bien que l'énoncé soit ambigu).

$\boxed{f \text{ est croissante}}$ car $\Delta_{y-x}(f)(x) = f(y) - f(x) \geqslant 0$ pour tout x, y tels que $y > x$.

III.D.2 $\Psi(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kt} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j t^j}{j!} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j t^j$ (l'interversion des sommes ne pose pas de problème car la somme externe est finie).

Ψ est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\Psi(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^n$, donc les coefficients du développement de degré $j \leqslant n-1$ sont nuls et celui de degré n est égal à 1, d'où $\boxed{S_j = 0 \text{ pour } j \leqslant n-1 \text{ et } S_n = 1.}$

III.D.3 Pour tout entier k, $f(x_0 + kh) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} k^j h^j + o(h^n)$, d'où

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} h^j f^{(j)}(x_0) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} \right) + o(h^n) = \sum_{j=0}^{n} h^j f^{(j)}(x_0) S_j + o(h^n) = h^n f^{(n)}(x_0) + o(h^n).$$

Cette expression est positive pour tout h positif au voisinage de 0, donc en divisant par h^n et en faisant tendre h vers 0, on obtient que $f^{(n)}(x_0) \geqslant 0$, pour n et x_0 quelconques, donc $\boxed{f \text{ est AM.}}$

Fin