(Corrigé de C. Devulder)

I. Quelques propriétés de $F=\theta(f)$.

1.1. $\boxed{\theta(1)(x)=\int_x^{x+1} dt=1}$

1.2. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\boxed{\theta(t^k)(x)=\int_x^{x+1} t^k\,dt=\frac{1}{k+1}((x+1)^{k+1}-x^{k+1})}$

Remarque : la formule est encore valable si $k=0$ ce qui unifie les deux questions.

2.1. D'après un théorème foncdamental du cours, $x\mapsto\int_a^x g(t)\,dt$ est une primitive de g sur l'intervalle I quand g est continue sur I et $a\in I$. Ici, notons $f_1 : x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$. C'est une primitive de f et

$$\forall x,\ F(x)=f_1(x+1)-f_1(x)$$

Cette formule montre que $\boxed{F\in\mathscr{C}^1 \text{ avec } \forall x,\ F'(x)=f_1'(x+1)-f_1'(x)=f(x+1)-f(x).}$

2.2. Si f croît sur J_{x_0} alors pour $x\geqslant x_0$ on a (puisque $x+1\geqslant x\geqslant x_0$) $f(x+1)-f(x)\geqslant 0$. F' est ainsi positive sur J_{x_0} et $\boxed{F \text{ est donc croissante sur } J_{x_0}.}$ La preuve est la même dans le cas décroisssant.

2.3. F est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement F' est nulle c'est-à-dire si et seulement si $\forall x,\ f(x+1)=f(x)$. Comme f est continue, cette condition équivaut à $\boxed{f\in\mathscr{C}_1^0.}$

2.4. $f : t\mapsto|\sin(\pi t)|$ étant élément de $\mathscr{C}_1^0$, son image par θ est constante. On a

$$\forall x,\ F(x)=F(0)=\int_0^1|\sin(\pi t)|\,dt=\int_0^1\sin(\pi t)\,dt=\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

2.5. Si f est constante égale à L_1 alors F l'est aussi. On devine donc que $L_2=L_1$. On forme donc la différence et on montre qu'elle est de limite nulle en $+\infty$.
Soit $\varepsilon>0$. On a $A\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\geqslant A$, $\left|f(x)-L_1\right|\leqslant\varepsilon$. Alors, si $x\geqslant A$,

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,dt-L_1\right|=\left|\int_x^{x+1}(f(t)-L_1)\,dt\right|\leqslant\int_x^{x+1}|f(t)-L_1|\,dt\leqslant\int_x^{x+1}\varepsilon=\varepsilon$$

donc $\boxed{F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.}$

Autre rédaction possible :

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,dt-L_1\right|=\left|\int_x^{x+1}(f(t)-L_1)\,dt\right|\leqslant\int_x^{x+1}|f(t)-L_1|\,dt$$

$t\mapsto|f(t)-L_1|$ étant continue sur le segment $[x,x+1]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment et

$$\exists c_x\in[x,x+1]/\ \left|\int_x^{x+1} f(t)\,dt-L_1\right|\leqslant|f(c_x)-L_1|$$

Comme $c_x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, le majorant est, par composition des limites, de limite nulle en $+\infty$. On a donc $\boxed{F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.}$

Autre rédaction possible :
Si G primitive de f, $F : x \mapsto G(x+1) - G(x)$, avec G de classe $\mathscr{C}^1$, donc continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc par théorème des accroissements finis, on a $c_x \in]x, x+1[$ tel que $F(x) = G(x+1) - G(x) = G'(c_x) = f(c_x)$. Si $x \to +\infty$, $c_x \to +\infty$ et $\boxed{F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.}$

3.1. Le changement de variable $x = -t$ donne

$$\psi(-u) = \int_{-u-1/2}^{-u+1/2} f(t)\,dt = -\int_{u+1/2}^{u-1/2} f(-x)\,dx = \int_{u-1/2}^{u+1/2} f(-x)\,dx$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ est paire (resp. impaire), } \psi \text{ l'est aussi.}}$

3.2. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine et celui d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Par ailleurs, le graphe de F se déduit de celui de ψ par translation de vecteur $(-1/2, 0)$. Ainsi,

1. $\boxed{\text{si } f \text{ est paire, le graphe de } F \text{ est symétrique par rapport à la droite } x = -1/2.}$
2. $\boxed{\text{si } f \text{ est impaire, le graphe de } F \text{ est symétrique par rapport au point } (-1/2, 0).}$

4.1. Soit $f_k : t \mapsto \dfrac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$.
H1 Les f_k sont continues.
H2 Par ailleurs $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.
H3 On a $\|f_k\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{k^2+1}$. Le majorant étant le terme général d'une série convergente,

$$\boxed{\sum f_k \text{ converge}}$$

normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
On a donc $\boxed{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).}$

4.2. **H1** f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k,\ f_k' : t \mapsto \frac{-2kt}{k^2+1} e^{-kt^2}$$

On remarque alors que

$$\forall b > a > 0,\ \forall |t| \in [a, b],\ |f_k'(t)| \leqslant \frac{2kb}{k^2+1} e^{-ka^2}$$

Le majorant est indépendant de t et, par croissance comparées, est négligeable devant $1/k^2$ quand $k \to +\infty$. C'est donc le terme général d'une série convergente.
H3 $\sum f_k'$ est ainsi normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
Par théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions,

$$f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*) \text{ et } \forall x \neq 0,\ f'(x) = -2t \sum_{k\geqslant 1} \frac{k e^{-kt^2}}{k^2+1}$$

Cette étude ne permet pas de conclure en 0. Soyons donc plus fins. La fonction $g_k : t \mapsto t e^{-kt^2}$ est dérivable et $g_k'(t) = (1-2kt^2)$. On a donc le tableau de variations suivant

t	0		$1/\sqrt{2k}$		$+\infty$
$g_k(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e/2k}$	$\searrow$	0

g_k étant impaire, on a $\|g_k\|_\infty = \sqrt{\dfrac{e}{2k}}$ et donc

$$\|f_k'\|_\infty = \frac{\sqrt{2ke}}{k^2+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2e}}{k^{3/2}}$$

Il y a donc convergence normale de $\sum f_k'$ sur $\mathbb{R}$ et, comme auparavant,

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ \forall x \neq 0,\ f'(x) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{-2tke^{-kt^2}}{k^2+1}.}$$

Remarque : on ne peut ici factoriser par t car pour $t=0$ la série resterait serait divergente.

4.3. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ prouvée en 4.1 permet d'appliquer le théorème de double limite. Comme chaque f_k $(k \geqslant 1)$ est de limite nulle en $+\infty$, on a donc $\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.}$

4.4. f est paire (comme les f_k), de limite nulle en l'infini, de dérivée nulle en 0. De plus, la fonction décroît sur $\mathbb{R}^+$ (dérivée négative). C'est une fonction qui est ainsi positive. On a donc une fonction « en cloche ».

4.5. On a $t^2 f(t) = \sum_{k\geqslant 1} t^2 f_k(t)$. La fonction $t \mapsto t^2 e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$. C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Notons M un de ses majorants. On a alors :

$$\forall t,\ |t^2 f_k(t)| = t^2 e^{-t^2} \frac{e^{-(k-1)t^2}}{k^2+1} \leqslant \frac{M}{k^2+1}$$

Le majorant est indépendant de t et est le terme général d'une série convergente. $\sum t^2 f_k(t)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et on peut, en particulier, utiliser le théorème de double limite en $\pm\infty$. $t^2 f_k(t)$ étant de limite nulle en $\pm\infty$, on obtient que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^2 e^{-kt^2}}{k^2+1} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$ c'est-à-dire que f est négligeable devant $1/t^2$ au voisinage des infinis. Elle est donc intégrable au voisinage des infinis et, étant continue sur $\mathbb{R}$, est finalement $\boxed{\text{intégrable sur } \mathbb{R}.}$

4.6. F est, comme f, de limite nulle en $+\infty$ (question 2.5) et décroissante sur $[0,+\infty[$ (question 2.2).
Par ailleurs, f est paire et la question 3.2 montre que le graphe de F est symétrique par rapport à la droite $x = -1/2$.
Le graphe de F a lui aussi l'allure d'une cloche (décalée sur la gauche par rapport à la première.
f étant décroissante (et positive) sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt \leqslant f(x) \int_x^{x+1} dt = f(x)$.
F est ainsi continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. C'est donc elle même une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, $\boxed{\text{elle est intégrable sur } \mathbb{R}.}$

II. L'endomorphisme θ.

1. On a $\mathrm{Im}(\theta) \subset \mathscr{C}^1$. Comme $x \mapsto |x|$ est continue et non de classe $\mathscr{C}^1$, c'est une fonction qui n'admet pas d'antécédent par θ. $\boxed{\theta \text{ n'est pas un endomorphisme surjectif de } \mathscr{C}^0.}$

2.1. Supposons $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$. On a alors $F = \theta(f)$ qui est constante (nulle) et donc (question $I.2.3$) $f \in \mathscr{C}_1^0$. De plus, $F(0) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
Réciproquement, si $f \in \mathscr{C}_1^0$ alors $F = \theta(f)$ est constante (question $I.2.3$) et cette constante vaut $F(0)$ et elle est nulle si $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

On a ainsi prouvé que $\boxed{\mathrm{Ker}(\theta) = \left\{ f \in \mathscr{C}_1^0 / \displaystyle\int_0^1 f = 0 \right\}.}$

2.2. c_k est continue et 1-périodique (continuité et 2π périodicité du cosinus). Les formules de trigonométrie donnent

$$\langle c_j | c_k \rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\cos(2\pi(j+k)t) + \cos(2\pi(j-k)t)\big)\,dt$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \cos(2\pi p t)\,dt$ est nul si $p \in \mathbb{Z}^*$ et vaut 1 si $p = 0$, on a donc $\forall j,k \in \mathbb{N}^*$, $<c_j|c_k> = \delta_{j,k}/2$.
Remarque : $\delta_{j,k}$ vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.
On a $c_k \in \mathrm{Ker}(\theta)$ (continuité, 1-périodicité, intégrale nulle sur $[0,1]$) et donc $Vect((c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}) \subset \mathrm{Ker}(\theta)$.
Par ailleurs, (c_k) est libre car elle est orthonormée. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(\theta) \text{ est de dimension infinie}}$ (il contient une famille libre infinie).

2.3. 1. f étant continue, ϕ_n est une primitive de f. Une intégration par parties donne alors $W_n = \left[\dfrac{\phi_n(t)}{t}\right]_n^{n+1} + \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\,dt$.

Par ailleurs, $\phi_n(n) = 0$ par définition et, f étant 1-périodique, $\phi_n(n+1) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = \phi_0$

On a donc finalement $W_n = \dfrac{\phi_0(1)}{n+1} + \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\,dt$.
Le changement de variable $u = t - n$ montre (avec la périodicité de f) que

$$\phi_n(x) = \int_0^{x-n} f(u+n)\,du = \int_0^{x-n} f(u)\,du = \phi_0(x-n)$$

$|\phi_0|$ est continue sur le SEGMENT $[0,1]$ et admet, sur ce segment, un maximum M. La formule précédente montre que $|\phi_n|$ admet ce maximum M sur $[n, n+1]$. On a donc $\left|\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\,dt\right| \leqslant M \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n(n+1)}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\,dt$ est le terme général d'une série convergente.

2. Si $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$ alors $\phi_0(1) = 0$ et $\boxed{\sum W_n \text{ converge.}}$

3. Sinon, W_n est somme de termes généraux de séries convergente et divergente $(\phi_0(1)/n)$.
On a donc $\boxed{\text{divergence de } \sum W_n.}$

3.1. Si $a \neq 0$, on a $\theta(h_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at}\, dt = \frac{1}{a}(e^{a(x+1)} - e^{ax}) = \frac{e^a - 1}{a} h_a(x)$.

h_a (qui est non nul) est donc vecteur propre de θ associé à la valeur propre $\frac{e^a-1}{a}$.

Quant à $h_0 = 1$, on a vu en $I.1.1$ qu'il est vecteur propre de θ associé à la valeur propre 1

(satisfaisant puisque $\frac{e^a-1}{a} \to 1$ quand $a \to 0$).

3.2. La fonction $h : u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $\forall u \neq 0,\ h'(u) = \frac{g(u)}{u^2}$ où $g(u) = ue^u - e^u + 1$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(u) = ue^u$. g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Etant nulle en 0, elle reste positive. Ainsi, h' est positive sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que h croît sur chaque intervalle

Remarque : on a $h(u) \to 1$ quand $u \to 0$. h est donc prolongeable par continuité et on a croissance de la fonction prolongée sur $\mathbb{R}$.

3.3. D'après la question 3.1, tout $\frac{e^a-1}{a}$ est dans le spectre de a pour tout a. Avec la question précédente, quand a parcourt $\mathbb{R}^{*-}$, $\frac{e^a-1}{a}$ parcourt $]0,1[$ (valeurs limites en $-\infty$ et 0 de la fonction). De même, quand a parcourt $\mathbb{R}^{*-}$, $\frac{e^a-1}{a}$ parcourt $]1,+\infty[$ (valeurs limites en 0 et $+\infty$ de la fonction). Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{0,1\}$ est dans le spectre de θ. Comme 0 et 1 sont aussi valeurs propres (fonctions c_1 et 1 par exemple), on a $Sp(\theta) \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

III. Une suite de fonctions propres.

1.1. ρ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ \rho'(t) = 2t\cos(2t) - 2t = -4t\sin^2(t)$.
La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur I_k. On a le tableau suivant

t	$2k\pi$		$(2k+1)\pi$
$\rho(t)$	$-4k^2\pi^2$	$\searrow$	$-(2k+1)^2\pi$

En particulier, ρ est négative sur I_k.

1.2. g est dérivable sur I_k et $\forall t \in I_k,\ g'(t) = \frac{\rho(t)}{t\sin^2(t)} < 0$.

g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I_k à dérivée non nulle sur I_k. g réalise donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de I_k dans son image $g(I_k)$ qui, par décroissance de g, vaut $g(I_k) =]\lim_{(2k+1)\pi} g, \lim_{2k\pi} g[$.
En $(2k+1)\pi$ par valeurs négatives, on n'a pas d'indétermination pour la limite ($-\infty - \infty$).
En $(2k\pi)^+$, on obtient $+\infty - \infty$ et il faut préciser. Ecrivons que

$$g(t) = \frac{1}{\sin(t)}(t\cos(t) + \sin(t)\ln(\sin(t)) - \sin(t)\ln(\lambda t))$$

Comme $u\ln(u) \to 0$ quand $u \to 0$, la parenthèse tend vers $2k\pi$ quand $t \to 2k\pi$. g est alors de limite égale à $+\infty$ en $(2k\pi)^+$. Finalement, $g(I_k) = \mathbb{R}$.

2.1. γ étant non nul, on a $\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\, dt = \frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma(x+1)} - e^{\gamma x}\right) = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{\gamma x}$.

2.2. On a alors $\displaystyle\int_x^{x+1} e^{at}\cos(bt)\,dt = Re\left(\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\,dt\right) = Re\left(\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma x}\right)$.

On a $h \in E_\lambda$ si et seulement si $\forall x,\ Re\left(\dfrac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma x}\right) = Re(\lambda e^{\gamma x})$.

Comme $e^{\gamma x} = e^{ax}e^{ibx}$ et comme e^{ax} est un réel non nul, cette condition équivaut à $\boxed{\forall x,\ Re\left(\dfrac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{ibx}\right.}$

- Si la condition a lieu alors $x=0$ donne $\lambda = Re\left(\dfrac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)$. $x = \dfrac{\pi}{2b}$ donne alors (en notant que $Re(iz) = -Im(z)$) $Im\left(\dfrac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right) = 0$. Une condition nécessaire est donc $\boxed{\lambda = \dfrac{e^{\gamma}-1}{\gamma}.}$
- La réciproque est bien vraie.

---

3. En écrivant $\gamma = a + ib$, la consition précédente s'écrit $e^a\cos(b) - 1 = \lambda a$ et $e^a\sin(b) = \lambda b$ ce que l'on peut écrire (après transformation, on exprime e^a avec la seconde équation et on remplace a par sa valeur dans la première)

$$e^{-a} = \frac{\sin(b)}{\lambda b} \quad \text{et} \quad \lambda g(b) = 1$$

Dans chaque I_k, on peut trouver b_k tel que $g(b_k) = 1/\lambda$ (du fait de la bijectivité prouvée en question $III.1.2$). On a alors un unique a_k tel que $e^{-a_k} = \dfrac{\sin(b_k)}{\lambda b_k}$ (bijectivité de $\exp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$). Pour tout k, $f_k : t \mapsto e^{a_k t}\cos(b_k t)$ est alors vecteur propre pour θ associé à la valeur propre λ.