Programme de colle – MPI

Passage à la limite sous l'intégrale

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Convergence dominée	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Intégration terme à terme	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0,+\infty]$, $$\int_I\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Bien sûr, on connaît aussi les théorèmes d'inversion dans le cas où l'intervalle est un segment et qu'il y a convergence uniforme.

Exemple de limite par découpage de l'intégrale.

Intégrales à paramètres

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Soit A une partie ~~d'un espace normé de dimension finie~~, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue ; — pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux ; — il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; — pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ; — pour tout $x\in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x\in A,\qquad g'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Pour le moment A est une partie de $\mathbb{R}$.

Ensembles dénombrables

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ $(p\in\mathbb{N}^*)$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable. La démonstration n'est pas exigible.

Semaine prochaine : Familles sommables, séries entières.

Questions de cours

(i) Énoncés précis parmi tous les théorèmes au programme au choix du colleur. Les hypothèses de continuité par morceau par rapport à la variable d'intégration sont omises.
Démonstration du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

(ii) $\Gamma : x\mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, expression des dérivées, convexité, limites en 0^+ et $+\infty$, graphe.
(On admet ici que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, démontré dans **CCINP 29**).
($\star$) Bonus pour les plus rapides : montrer que Γ est $\ln$-convexe, c'est-à-dire que $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

(iii) Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ (on peut se contenter d'une preuve graphique), $\mathbb{Q}$.

(iv) (Groupes $\star$) Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

(v) **CCINP 19** :

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\ln t\,\mathrm{d}t$.
2. Prouver que $f : t\longmapsto \mathrm{e}^t\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\ln t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,n!}$.
   Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

(vi) **CCINP 25** :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t\longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pose $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^ne^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).

(vii) **CCINP 26** : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

(viii) **CCINP 27** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(ix) **CCINP 29** : On pose : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

(x) **CCINP 30** :

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   b) Résoudre (E).

(xi) **CCINP 49** : Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$.

   b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(xii) **CCINP 50** : On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.