Programme de colle – MPI

Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette section est :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée. Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$.	Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f\rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.
Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.
e) Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

Pour les intégrations par parties sur des intervalles quelconques : on revient systématiquement sur un segment. Pas de convergence dominée au programme cette semaine.

Pas de colle la semaine prochaine. Semaine suivante : Convergence dominée, intégrales à paramètres, Sommabilité.

Questions de cours

(i) Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ne tendant pas vers 0, voire non bornée.

(ii) Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (cas réel ou complexe).

(iii) Étude de l'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (convergence et non intégrabilité).

(iv) Intégrales de Bertrand sur $[2,+\infty[$.

(v) Intégration des relations de comparaison : démonstration dans le cas de convergence (mais énoncé dans les deux cas).

(vi) **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

(a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

(b) Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?