# Programme de colle – MPI

## Intégration sur un segment

Révisions du programme de première année : calculs de primitives, intégrales sur un segment des fonctions numériques. Voir programme page suivante.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est revue à cette occasion, pour être utilisée avec les intégrales.

## Régularité des suites et séries de fonctions

Reprise du début du chapitre auquel on ajoute l'intégration sur un segment et la classe $\mathscr{C}^k$.

*Extrait du programme officiel :*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Convergence simple, convergence uniforme** | |
| Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. | Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme. |
| **b) Continuité, double limite** | |
| Si les $u_n$ sont continues en $a$ et si $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur $A$, alors $u$ est continue en $a$. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur $A$ est continue sur $A$. | Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation. |
| Théorème de la double limite : soit $(u_n)$ une suite de fonctions de $A$ dans $F$ convergeant uniformément vers $u$ sur $A$, et soit $a$ un point adhérent à $A$ ; si, pour tout $n$, $u_n$ admet une limite $\ell_n$ en $a$, alors $(\ell_n)$ admet une limite $\ell$ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. | La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$. |
| **c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment** | |
| Soit $(u_n)$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $F$, $a$ un point de $I$. On suppose que $(u_n)$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers une fonction $u$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x)=\int_a^x u_n, \quad U(x)=\int_a^x u.$$ Alors $(U_n)$ converge uniformément vers $U$ sur tout segment de $I$. | En particulier, si $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$. |
| **d) Dérivation d'une suite de fonctions** | |
| Soit $(u_n)$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $F$. Si $(u_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $u$, et si $(u_n')$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers une fonction $v$, alors $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur tout segment de $I$, $u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $u'=v$. | En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n')$ sur des intervalles adaptés à la situation. |
| Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$. | En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation. |
| **e) Séries de fonctions** | |
| Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers $0$. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions. | |
| Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme. | La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale. |
| **f) Approximation uniforme** | |
| Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment $S$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur $S$ de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$. | La démonstration n'est pas exigible. |

**Semaine prochaine** : Intégrales à paramètres, convergence dominée.

## Questions de cours

(i) Énoncés précis des théorèmes d'intégration sur un segment, primitive, classe $\mathscr{C}^k$ (avec $k$ éventuellement infini) d'une suite de fonction ou d'une série de fonctions.
Énoncé des trois formules de Taylor.

(ii) Fonction $\zeta$ de Riemann : classe $\mathscr{C}^\infty$, expression des dérivées, variations, convexité, limite aux bornes et graphe.

(iii) Intégrales de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ : relation de récurrence, expression, équivalent.

(iv) Un calcul de primitive de la forme $\dfrac{ax+b}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ avec $\beta^2 < 4\alpha\gamma$ au choix du colleur.

(v) **CCINP 8** :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

      **Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

(vi) **CCINP 9** :

1. Soit $X$ un ensemble, $(g_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbb{C}$ et $g$ une fonction de $X$ dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur $X$ de la suite de fonctions $(g_n)$ vers la fonction $g$.
2. On pose $f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)$.
   b) La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$ ?
   c) Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$ ?
   d) La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$ ?

(vii) **CCINP 10** : On pose $f_n(x)=(x^2+1)\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

(viii) **CCINP 11** :

1. Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f$.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ telle que la suite $\big(f_n(x_n)-f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $0$.
   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ ne converge pas uniformément vers $f$ sur $X$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)$.
   b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

(ix) **CCINP 12** :

1. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f$, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue en $x_0$, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que $f$ est continue en $x_0$.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$ ?

(x) **CCINP 14** :

1. Soit $a$ et $b$ deux réels donnés avec $a<b$.
   Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f$, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

(xi) **CCINP 15** : Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur $X$, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $X$.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur $X$ est uniformément convergente sur $X$.
3. La série de fonctions $\sum\dfrac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre $0$ et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$ ?

(xii) **CCINP 16** : On considère la série de fonctions de terme général $u_n$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que $S$ est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

(xiii) **CCINP 17** : Soit $A\subset\mathbb{C}$ et $(f_n)$ une suite de fonctions de $A$ dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :
   $$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
   $$\Downarrow$$
   $$\Big(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0;+\infty[$, $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$ ? Justifier.

(xiv) **CCINP 18** : On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=\dfrac{(-1)^nx^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note $D$ l'ensemble des $x$ où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
2. a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur $D$.
   b) La fonction $S$ est-elle continue sur $D$ ?

(xv) **CCINP 53** : On considère, pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$.
   b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$.
   $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$ ? sur $[a,+\infty[$ ?

c) $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$ ?

2. Prouver que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(xvi) **CCINP 76** : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0 \right\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure $m$ et déterminer la valeur de $m$.

(xvii) **CCINP 79** : Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$.

1. Soit $h$ une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$ .
2. Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

## Programme de MP2I

*Extrait du programme officiel :*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Calcul de primitives** | |
| Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives. | Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue $f$, $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée $f$. On pourra noter $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de $f$. |
| Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales. | Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$. |
| Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Intégration par parties, changement de variable. | Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité. |
| **Fonctions continues par morceaux** | |
| Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Fonction en escalier, fonction continue par morceaux. | Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$. |
| **Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment** | |
| Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$. | Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. |
| Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$. | |
| Relation de Chasles. | Extension de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes. |
| Si $f$ est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$. | |
| Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en $0$. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période. | Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment. |
| **Sommes de Riemann** | |
| Pour $f$ continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$ | Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour $f$ lipschitzienne. |
| **Lien entre intégrale et primitive** | |
| Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $f$ continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. | |
| **Formules de Taylor globales** | |
| Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange. | L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales. |