

Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;
- introduire la notion de fonction développable en série entière ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty[$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Disque ouvert de convergence.
Intervalle ouvert de convergence.

Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geq R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être utilisée directement.

b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème d'Abel radial :

si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

La somme d'une série entière est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

La démonstration est hors programme.

Relation $R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$.

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

d) Fonctions développables en série entière, développements usuels

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , sur l'intervalle $] -R, R[$.

Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.



CONTENUS

Développements usuels dans le domaine réel.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arc-tan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^a$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Table des matières

18 Séries entières	1
I Convergence des séries entières	4
1 Définition	4
2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence	4
a Lemme d'Abel	4
b Rayon de convergence	4
c Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence	6
d Comparaison de rayons de convergence	9
3 Convergence normale	10
II Opérations algébriques sur les séries entières	11
1 Combinaisons linéaires	11
2 Produits de Cauchy	12
3 Séparation des termes d'ordre pair et impair	13
III Série entière d'une variable réelle	13
1 Continuité de la somme d'une série entière	14
2 Théorème d'Abel radial	14
3 Classe de la somme d'une série entière	16
4 Primitivation de la somme d'une série entière	17
5 Quelques calculs	18
IV Fonctions développables en série entière	19
1 Définition	19
2 Stabilité	19
3 Condition nécessaire, série de Taylor	19
4 Critère de développabilité en série entière	20
V Développements en séries entières des fonctions usuelles	21
1 Fonctions d'une variable complexe	21
a Exponentielle complexe	21
b Série géométrique	22
2 Exponentielle réelle	22
3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques	23
4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$	23
5 $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$	24
6 Arctan, Arcsin	25
VI Quelques méthodes	26
1 Développements en séries entières	26



CONVERGENCE DES SÉRIES ENTIÈRES

1 Définition

Définition 1 : Série entière

On appelle **série entière** toute série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe.

2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence

a Lemme d'Abel

Propriété 1 : Lemme d'Abel

Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Si la suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Version du programme : Si la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Avec $r \neq 0$, $|a_n z^n| = |a_n r^n| \left| \frac{z}{r} \right|^n = 0 \left(\left(\frac{|z|}{r} \right)^n \right)$ terme général de série convergente. ■

b Rayon de convergence

Propriété 2 : Définition pratique du rayon de convergence

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$ unique tel que

- Si $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente. (ce cas ne se produit pas si $R = 0$.)
- Si $|z| > R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est (très) grossièrement divergente : la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée, et donc a fortiori ne converge pas vers 0. (ce cas ne se produit pas si $R = +\infty$.)

Démonstration

Analyse Soit R convenant.

Si $R < +\infty$, $X = \{r \in \mathbb{R}^+ ; (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ bornée}\}$ est une partie de \mathbb{R}^+ contenant 0, telle que $[0, R[\subset X \subset [0, R]$, donc $R = \sup X$.

D'où l'unicité sous réserve d'existence.

Synthèse Posons $R = \sup X \in [0, +\infty]$.

Dans le cas où ce sup vaut $+\infty$, X n'est pas majorée donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $r \in X$ tel que $|z| < r$ et, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente. Donc $R = +\infty$ convient.

Si le sup est fini, si $|z| < R = \sup X$, il existe $r \in X$ tel que $|z| < r$ donc d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Et si $|z| > R$, $|z| \notin X$ donc la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée.
De nouveau, R convient.
D'où l'existence.

Définition 2 : Rayon et disque ouvert de convergence

R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, parfois noté $R(\sum a_n z^n)$ dans le programme.

Définition du programme :

$$R = \sup \{ \{ r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ est bornée} \} \} \in [0, +\infty].$$

$D(0, R) = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < R \}$ est le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Si $R = +\infty$, ce disque ouvert est \mathbb{C} .

Si $R = 0$, c'est \emptyset .

Sinon, c'est un « vrai » disque.

Remarque

R1 – Définition équivalente :

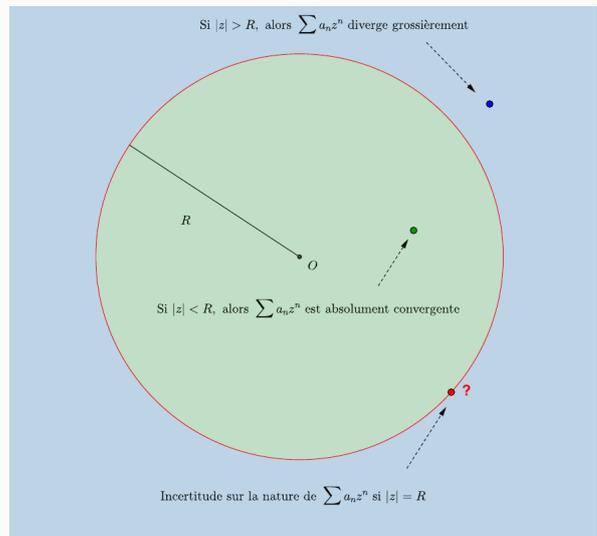
$$R = \sup \left\{ \left\{ r \in \mathbb{R}^+, \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ absolument convergente} \right\} \right\} \in [0, +\infty]$$

R2 – D'après la définition du rayon de convergence R ,

- Si $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente, mais aussi $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, et $(a_n z^n)$ est bornée, et $a_n z^n \rightarrow 0$.
- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée, mais aussi $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement, $a_n z^n \not\rightarrow 0$.
- Si $|z| = R$: cas douteux, tout peut arriver.

Si $R = +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Si $R = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge si et seulement si $z = 0$.



R3 – Ne pas confondre $D_R = D(0, R)$ avec l'ensemble de définition de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On a en général $D_R \subset D_f \subset \overline{D_R}$.
Si $R = 0$, $D_f = \{0\}$ et si $R = +\infty$, $D_f = \mathbb{C}$.

R4 – Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

R5 – Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^{n+p}$ et $\sum_{n \geq p} a_n z^{n-p}$ ont même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Exemple

E1 – La série géométrique $\sum z^n$ a un rayon de convergence de 1.



C Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence



Méthode 1 : Utilisation du critère de d'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit.

Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes réels strictement positifs.

Propriété 3 : Critère de d'Alembert (Rappel)

Soit (u_n) suite à termes réels strictement positifs tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty].$$

- Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge (très) grossièrement (et même $u_n \rightarrow +\infty$).
- Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).

Exercice 1 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ convergence absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.

Exercice 2 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n^2 z^n$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2 |z|^{n+1}}{n^2 |z|^n} \rightarrow |z|$, donc $\sum_{n \geq 0} n^2 z^n$ convergence absolument si $|z| < 1$ et diverge grossièrement si $|z| > 1$, donc $R = 1$.

Remarque

- R6 – Un version spéciale séries entières refait son apparition dans le programme : à utiliser ou non...
Mais parfois on est obligé de revenir à l'énoncé général (voir exercice sur série entière lacunaire).

Propriété 4 : Critère de d'Alembert version série entière

Si au moins à partir d'un certain rang $a_n \neq 0$ et si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, +\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$ (où $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Exercice 3 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.

$\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$, donc $R = e$.

Exercice 4 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$

$$\frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ donc } R = 2.$$

Exercice 5 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n! z^n$.

$$\frac{(n+1)!}{n!} \rightarrow +\infty, \text{ donc } R = 0.$$

Bon, pour cet exemple, pas besoin de d'Alembert, on a directement que si $z \neq 0$, $n! z^n \not\rightarrow 0$...

Exercice 6 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n^4 + n^3 + 1}{2\sqrt{n} + 3}$

Dans cet exemple, mieux vaut passer par un équivalent : $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim 1$, donc $R = 1$.

Exercice 7 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ (série entière lacunaire)

Là, pas le choix, on revient au critère de d'Alembert général.

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C}^*, \frac{(n+1)^2 |z|^{2n+2} 2^n}{n^2 |z|^{2n} 2^{n+1}} \rightarrow \frac{|z|^2}{2}, \text{ donc } R = \sqrt{2}.$$

Autre possibilité, vu l'exercice 4, on a absolue convergence si et seulement si $|z^2| < 2$ si et seulement si $|z| < \sqrt{2}$ ce qui redonne $R = \sqrt{2}$.

Remarque

R7 – La série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ est vue comme la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{n^2}{2^n}$ et $a_{2n+1} = 0$.

Exercice 8 : CCINP 20 (a) : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C}^*, \frac{(n+1)!^2 |z|^{2n+3} (2n)!}{(2n+2)! n!^2 |z|^{2n+1}} \rightarrow \frac{|z|^2}{4}, \text{ donc } R = 2.$$



Méthode 2 : Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver

- un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument,
- un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge,

on est sûr que $R = |z|$.

Exercice 9 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$

Pour $z = -1$, la série est semi-convergente. Donc $R = 1$.
On aurait aussi pu appliquer le critère de d'Alembert.


Exercice 10 : CCINP 20 (c) : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \cos(n)z^n$

La suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers 0 (sinon, on a un problème avec $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1 \dots$) donc la série $\sum \cos(n)1^n$ ne converge pas absolument, donc $R = 1$.

Remarque : Cette fois, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.

Exercice 11 : CCINP 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

- 1.
2. Puisque $\sum a_n 1^n$ diverge, $R \leq 1$.
Puisque $(a_n 1^n)$ est bornée, $R \leq 1$.
Donc $R = 1$.
3. $(\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite équivalente à $(\sqrt{n})^{(-1)^n - 1}$ donc bornée en séparant n pair ou impair et $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge grossièrement donc $R = 1$.


Méthode 3 : Suites bornées, convergence vers zéro

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes (penser au dessin avec le disque de convergence) :

- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leq R$
- Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geq R$.

Mais aussi

- Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leq R$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geq R$.

Exercice 12 : Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n -ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$

Comme (a_n) est bornée $R \geq 1$.
Mais $a_n \neq 0$ (car $\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$), donc $R \leq 1$.
Finalement, $R = 1$.

Remarque : rentre aussi dans la remarque qui résout tout car (a_n) est bornée sans tendre vers 0.

Exercice 13 : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

Si $|z| < R'$, $|a_n|^2 |z|^n \rightarrow 0$ donc $|a_n| \sqrt{|z|^n} \rightarrow 0$ donc $\sqrt{|z|} \leq R$ et $|z| \leq R^2$ donc $R' \leq R^2$.
Puis si $|z| < R$, $a_n z^n \rightarrow 0$ donc $a_n^2 z^{2n} \rightarrow 0$ donc $|z|^2 < R'$ donc $R' \geq R^2$.
Finalement, $R' = R^2$.

Remarque

R8 – Il est bon de retenir qu'il n'est jamais nécessaire d'utiliser la convergence des séries pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. En revanche, il peut s'avérer indispensable d'utiliser les suites bornées.

d Comparaison de rayons de convergence

Propriété 5 : Comparaison des suites de coefficients et rayon de convergence

On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors,

- si $|a_n| \leq |b_n|$, ou $a_n = o(b_n)$ ou plus généralement $a_n = \mathcal{O}(b_n)$,

$$R_a \geq R_b.$$

- et si $a_n \sim b_n$,

$$R_a = R_b.$$

Démonstration

- si $|z| \leq R_b$, $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc $|z| \leq R_a$. Donc $R_a \geq R_b$.
- Deux applications symétriques du premier point.

Propriété 6 : Multiplication par n

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Soient R, R' les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |n a_n|$ donc $R \geq R'$.

Puis, si $|z| < R$, on va se débarrasser du n en comparant à une suite géométrique : si $|z| < r < R$, $|n a_n z^n| = n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \cdot |a_n r^n| = o(a_n r^n)$ par croissances comparées. Mais $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, donc $\sum n a_n z^n$ l'est aussi et $|z| \leq R'$. Ainsi, $R \leq R'$.

Corollaire 1 : multiplication ou division par n^k

Si $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum_{n \geq 0} n^k a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} n^k a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Propriété 7 : Rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ a comme rayon de convergence 1.

Démonstration

L'encadrement

$$n^{[\alpha]} \leq n^\alpha \leq n^{[\alpha]+1}$$

permet de conclure.

**Remarque**

$\mathbb{R}^9 - \sum z^n, \sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont des rayons de convergence égaux à 1.

La première diverge sur tout le cercle, la seconde converge en certains points et diverge en d'autres, la troisième converge (absolument) en tout point du cercle.

Exercice 14 : CCINP 20 (b) : Déterminer le rayon de convergence la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$

Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n^{(-1)^n}$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |a_n z^n| \leq |n z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^n$ vaut 1. Donc $R \geq 1$. (*)

De même, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, |\frac{1}{n} z^n| \leq |a_n z^n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{n} z^n$ vaut 1. Donc $R \leq 1$. (**)

D'après (*) et (**), $R = 1$.

3 Convergence normale**Propriété 8 : Convergence normale**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$. Alors $\sum f_n$ convergence normalement, donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans $D(0, R)$.

Démonstration

On voit graphiquement qu'un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ inclus dans $D(0, R)$ est lui-même inclus dans un disque fermé $\overline{D}(0, r_0)$ inclus dans $D(0, R)$ par inégalité triangulaire (Si $|z - z_0| \leq r$, alors $|z| = |z - z_0 + z_0| \leq r_0 = r + |z_0| < R$).

Donc $\overline{D}(z_0, r) \subset \overline{D}(0, r_0)$ avec $r_0 < R$ et $\sum |a_n r_0^n|$ est convergente, d'où la convergence normale sur $\overline{D}(z_0, r)$. ■

Exercice 15 : CCINP 15

Soit X une partie de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

1.

2.

3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{n^2}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n^2}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

On en déduit que série entière $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Cette série entière converge donc normalement sur tout disque fermé de \mathbb{C} .

En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R .

OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

1 Combinaisons linéaires

Propriété 9 : Somme de deux séries entières

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$. Alors

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, $\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b))$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Enfin, si $R_a \neq R_b$, on a $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration

Si $|z| \leq \min(R_a, R_b)$, on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.

Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$, z tel que $R_a < |z| < R_b$, alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge donc $|z| \geq R_{a+b}$ puis $R_a \geq R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b) = R_a$. ■

Remarque

R 10 – Lorsque $R_a = R_b$, il est possible que R_{a+b} soit strictement supérieur à $R_a = R_b$.

Exemple

E2 – Les séries entières (géométriques) $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont pour rayon de convergence $R = 1$. Leur somme est la série nulle de rayon de convergence $R_{a+b} = +\infty$.

Propriété 10 : Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Démonstration

$(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $(\lambda a_n z^n)$ l'est. ■



2 Produits de Cauchy

Propriété 11 : Produits de Cauchy

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ où, pour

tout entier naturel n , $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Notons R_c son rayon de convergence. Alors

$$R_c \geq \min(R_a, R_b)$$

et $\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b))$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration

Un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes converge vers le produit des sommes. ■

Remarque

R 11 – Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que l'on ait $R_c > \min(R_a, R_b)$. Se méfier d'une confusion avec la somme, donc.

Exemple

E 3 – Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par

■ $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et pour tout entier $n > 2$, $a_n = 0$,

■ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$.

Les séries entières ont pour rayons de convergence respectifs $R_a = +\infty$ et $R_b = 1$.

Or $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_1 = 0$, donc $R_c = +\infty$.

Exercice 16 : Soit $D = D(0, 1)$. Montrer que pour tout $z \in D$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$.

Remarque

R 12 – Parfois les séries entières ne sont définies qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, si on considère des séries entières $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n z^n$, alors le produit de Cauchy se définit $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ en posant $a_0 = b_0 = 0$. Ainsi, pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ et $c_0 = c_1 = 0$. Sur son intervalle ouvert de convergence, on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

3 Séparation des termes d'ordre pair et impair

Exercice 17 : CCINP 47 question 2.

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

On considère les séries $\sum a_{2n} x^{2n} = \sum 4^n x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.

Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum 4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.

Le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1.

Or, $\sum 4^n x^{2n} = \sum (4x^2)^n$.

Donc pour $|4x^2| < 1$ c'est-à-dire $|x| < \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ converge absolument et pour $|4x^2| > 1$ c'est-à-dire $|x| > \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ diverge.

On en déduit que $R_1 = \frac{1}{2}$.

Par un raisonnement similaire et comme $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = 5x \sum (5x^2)^n$, on trouve $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Attention, ici il y a un problème dans le corrigé officiel.

Si les séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux, alors c'est le cas de $\sum a_n x^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquet). On en déduit que $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq R$. Autre argument possible sans la sommabilité ? si $a_{2n} x^{2n} \rightarrow 0$ et $a_{2n+1} x^{2n+1} \rightarrow 0$ alors $a_n x^n \rightarrow 0$.

Puis si $|x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$, alors $(a_{2n+1} x^{2n+1})$ n'est pas bornée donc $(a_n x^n)$ ne l'est pas non plus, donc $|x| \geq R$ et ainsi $\frac{1}{\sqrt{5}} \geq R$.

Finalement, $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

D'après ce qui précède, on en déduit également que (sommation par paquet ou passage par les sommes partielles)

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.$$

Exercice 18

Soit R, R', R'' le rayon de convergence de $\sum a_n z^n, \sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$. Montrer que $R = \min(R', R'')$.

Si les séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux, alors c'est le cas de $\sum a_n z^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquet). On en déduit que $\min(R', R'') \leq R$. Autre argument possible sans la sommabilité ? si $a_{2n} z^{2n} \rightarrow 0$ et $a_{2n+1} z^{2n+1} \rightarrow 0$ alors $a_n z^n \rightarrow 0$.

Puis en remarquant qu'en posant b_n tel que $b_n = a_n$ si n pair et 0 sinon, on a $|b_n| \leq |a_n|$, on obtient $R' \geq R$ et de même on montre que $R'' \geq R$. Donc, $R \leq \min(R', R'')$.

Autre argument possible, si $|z| > R'$, il y a divergence grossière de $\sum a_{2n} z^{2n}$, donc $a_{2n} z^{2n} \not\rightarrow 0$ (ou non bornée) donc $a_n z^n \not\rightarrow 0$ (ou non bornée) donc $|z| \geq R$ et $R' \geq R$. De même, $R'' \geq R$.

Finalement, $R = \min(R', R'')$.

SÉRIE ENTIÈRE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dorénavant, on considère des séries entières de la variable réelle : on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être une suite de nombres réels ou complexes, mais x reste réel.

Le disque ouvert de convergence devient intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$ et on a $] -R, R[\subset D_f \subset [-R, R]$,

où R est le rayon de convergence.

On ne peut rien dire en général en $\pm R$.



1 Continuité de la somme d'une série entière

Propriété 12 : Convergence normale, version réelle

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
 Si $R > 0$, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment inclus dans $] -R, R[$.

Corollaire 2 : Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$.

Démonstration

On obtient ici la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$ car les f_n sont continues et la convergence est uniforme car normale au voisinage de chaque point de $] -R, R[$.
 On étendra prochainement cette propriété aux séries entières d'une variables complexe. ■

Remarque

R 13 – Il peut y avoir des discontinuités « au bord. »
 Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout « au bord. »

Exercice 19 : Jadis au programme...

Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.
 Il y a convergence normale sur $[-R, R]$.

2 Théorème d'Abel radial

Théorème 1 : d'Abel radial

Si la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Démonstration

Hors-programme mais intéressante : utilisation d'une transformation d'Abel sur le reste après s'être ramené au cas $R = 1$. Voir exercice de TD. ■

Remarque

R 14 – Si le rayon de convergence est $> R$, le résultat reste vrai mais est banal.
R 15 – Dans le cas où $\sum |a_n| R^n$ converge, la série de fonctions continues $\sum (x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement sur $[-R, R]$, sa somme est donc continue en R , ce qui montre très simplement le théorème.

R 16 – Il est intéressant d'écrire le cas où $R = 1$: si $\sum a_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

(dans ce cas, le rayon de convergence est ≥ 1 .)

Exercice 20 : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Ces exemples peuvent aussi se traiter sans le théorème d'Abel, en utilisant la majoration du reste dans le théorème des séries alternées pour montrer par exemple que $\sum \left(x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 21 : CCINP 18

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?

(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .

(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.

En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).

On a donc $D =]-1, 1]$.

2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $] -1, 1[$. (*)

En $x = 1$, il s'agit de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, dont la convergence est assurée par application immédiate du critère des séries alternées.

Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de S en 1, et donc finalement sur D entier.

(b) $\forall x \in D, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in]-1, 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas normalement sur D .

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème

de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, ce qui est absurde.

(c) On étudie la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

$\forall x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste R_n .

On a :

$$\forall x \in [0, 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}. \quad (\text{majoration indépendante de } x)$$

$$\text{Donc } \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Bilan final :



En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $] -1, 1[$ et converge uniformément sur tout segment de $] -1, 1[$.

Corollaire 3 : Extension (HP)

si $\sum a_n (-R)^n$ converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow -R^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème à $x \mapsto f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$ où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui a même rayon de convergence.

Corollaire 4 : Extension (HP)

Si $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, et si $\sum a_n (Re^{i\theta})^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{in\theta} \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n e^{in\theta}$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème à $x \mapsto f(xe^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{in\theta}$ où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui a même rayon de convergence.

3 Classe de la somme d'une série entière

Propriété 13 : Classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence

On suppose que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k \geq 1$, pour tout $x \in] -R, R[$, on peut écrire

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k} x^p$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).

On a alors $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Démonstration

On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions : les f_n sont de classe \mathcal{C}^∞ , la série de fonction converge simplement et pour tout k , la série des $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $] -R, R[$.

Exercice 22 : CCINP 23

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R .

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $] -R, R[$.

1. Pour $x \neq 0$, posons $u_n(x) = a_n x^n$ et $v_n(x) = (n+1)a_{n+1}x^n$.

On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

On a, alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \ell|x|$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = \ell|x|$.

On en déduit que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ vaut $R = 1/\ell$ (avec $R = +\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$).

2. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, f_n(x) = a_n x^n$.

Soit $r \in]0, R[$. On pose $D_r = [-r, r]$.

i) $\sum f_n$ converge simplement sur D_r .

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur D_r .

iii) D'après 1., $\sum f'_n$ est une série entière de rayon de convergence R .

Donc, d'après le cours, $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $] -R, R[$, donc converge uniformément sur D_r .

On en déduit que $\forall r \in]0, R[, S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur D_r .

Donc, S est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -R, R[$.

Exercice 23

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$ fixé. On rappelle que $\sum \frac{\cos n\theta}{n}$ converge (se fait par transformation d'Abel...) Calculer la somme de cette série à l'aide d'une transformation d'Abel.

4 Primitivation de la somme d'une série entière

Propriété 14

On suppose que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors les primitives de

$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$ sont données par

$$F : x \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(Cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R).

Démonstration

Conséquence immédiate de la propriété précédente. ■



5 Quelques calculs

Exemple

E4 – Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Et ainsi de suite...

E5 – On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n =$$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

(Cette dernière ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles.)

E6 – Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles. Par exemple, définissons, si $n \geq 1$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Alors le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$ est $R = 1$ et on calcule

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Remarquons que, pour tout n , $H_n \geq 1$. Donc $R \leq 1$ (la série $\sum H_n 1^n$ diverge grossièrement, donc 1 n'est pas dans le disque ouvert de convergence). Mais aussi, pour tout $n \geq 1$,

$$H_n \leq n \times 1 = n$$

(majoration d'une somme par le nombre de termes multiplié par le plus grand d'entre eux). Donc $R \geq 1$ (en effet, si $|x| < 1$, $H_n x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, donc $|x| \leq R$).

Notons que l'équivalent célèbre $H_n \sim \ln n$ n'est pas nécessaire ici : très souvent, la détermination d'un rayon de convergence est assez grossière.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ et, si $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{n}$. On définit aussi $b_0 = 0$. On a construit ces deux suites pour avoir, en posant $h_0 = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$.

On peut alors appliquer le théorème sur le produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

IV FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

1 Définition

Définition 3 : Fonction DSE

Soit $r > 0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $] -r, r[$; on dit que f est **développable en série entière sur $] -r, r[$** lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in] -r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque

R 17 – On dit aussi que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $] -r, r[$.

2 Stabilité

Propriété 15 : Opération sur les fonctions DSE

Toute combinaison linéaire, tout produit, la dérivée, toute primitive d'une fonctions développables en série entière sur $] -r, r[$ le sont.

3 Condition nécessaire, série de Taylor

Remarque

R 18 – Pour que f soit développable en série entière sur $] -r, r[$, il est nécessaire qu'elle soit de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle.

Définition 4 : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0 (i.e. de classe \mathcal{C}^∞ sur au moins un certain intervalle $] -\delta, \delta[$ avec $\delta > 0$). On appelle **série de Taylor de f** la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Propriété 16 : condition nécessaire et unicité

Si f est développable en série entière sur $] -r, r[$ ($r > 0$), elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière s'il existe.



Remarque

R 19 – Simple mais important ! « par unicité du développement en série entière » sera un argument fréquemment utilisé.

Propriété 17 : Unicité du DSE

Si $\forall x \in]-r, r[f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (on suppose $r > 0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geq r$), alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque

R 20 – Comme pour les développements limités, l’unicité permet de voir que si une fonction est paire (respectivement impaire), alors tous les termes d’indices impairs (respectivement pairs) sont nuls.

Propriété 18 : Unicité bis du DSE

Si $\forall x \in]0, r[f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (on suppose $r > 0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geq r$), alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque

R 21 – Cette version est nouvelle au programme et est très intéressante pour les séries génératrices en probabilités.

Exercice 24 : montrant que la condition n’est pas suffisante

Montrer que $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ prolongée par continuité en 0 est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , que sa série de Taylor a un rayon de convergence infini et que pourtant la fonction n’est pas développable en série entière.

Notons en effet f cette fonction. On a vu que f était de classe \mathcal{C}^∞ , et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0) = 0$$

Si f est développable en série entière sur $] -r, r[$ ($r > 0$), alors elle est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c’est-à-dire

$$\forall x \in] -r, r[f(x) = 0$$

ce qui est manifestement faux. Donc f n’est pas développable en série entière autour de 0.

4 Critère de développabilité en série entière

Propriété 19 : Critère de développabilité en série entière

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $] -r, r[$ ($r > 0$), à valeurs réelles ou complexes.
On note, pour tout $x \in] -r, r[$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Alors f est développable en série entière sur $] -r, r[$ si et seulement si, pour tout x dans $] -r, r[$, la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration

En effet

$$\begin{aligned} f \text{ est développable en série entière sur }] -r, r[&\iff \forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &\iff \forall x \in] -r, r[, \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \\ &\iff \forall x \in] -r, r[, R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque

R22 – On rappelle que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

et surtout que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}|$$

V DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ENTIÈRES DES FONCTIONS USUELLES

1 Fonctions d'une variable complexe

a Exponentielle complexe

Propriété 20 : Série exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

Remarque

R23 – C'est aussi une définition alternative de $\exp(z)$.



Démonstration

Déjà vu : on applique Taylor-Lagrange à $f : t \in [0, 1] \mapsto e^{tz}$, de classe \mathcal{C}^∞ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = z^n$.

$|f^{(n+1)}(t)| = |z^{n+1} e^{tz}| = |z|^{n+1} e^{t\Re(z)} \leq |z|^{n+1} e^{t\Re(z)} \leq |z|^{n+1} \max(1, e^{\Re(z)}) = M(z)$ donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} M(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \blacksquare$$

Corollaire 5 : Morphisme

Pour tous z et z' dans \mathbb{C} ,

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z').$$

Démonstration

Produit de Cauchy. ■

b

Série géométrique

Propriété 21 : Série géométrique

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ($R = 1$).

2 Exponentielle réelle

Propriété 22 : DSE de e^x

La fonction $x \mapsto e^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (R = +\infty)$$

Démonstration

C'est le cas réel du paragraphe précédent.

On peut aussi le remonter directement : on a, pour tout k , $\exp^{(k)} = \exp$. Donc la majoration de Taylor-Lagrange donne, pour tout x réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

où $M = \sup_{[0, x]}(\exp)$ ($= 1$ si $x \leq 0$, $= e^x$ si $x \geq 0$). Or par croissances comparées,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$$

Exercice 25

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété 23 : DSE de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$

Les fonctions \sin , \cos , ch , sh sont développables en série entière sur \mathbb{R} ($R = +\infty$), et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Remarque

R24 – Cela permet de démontrer que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. L'aviez-vous un jour démontré ?

Démonstration

Soit Taylor-Lagrange, soit $\cos x = \Re(e^{ix})$ et $\sin x = \Im(e^{ix})$.

Pour sh et ch : on peut aussi les voir comme parties paire et impaire de l'exponentielle. Ou alors on revient à la définition et on utilise le développement de l'exponentielle. ■

4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Propriété 24 : DSE de $(1+x)^\alpha$

Pour tout α réel, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ ($R = 1$).

$$\forall x \in] -1, 1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le développement est valable dans \mathbb{R} ($R = +\infty$).

Remarque

R25 – On note parfois $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Cette notation ne vaut rien si on ne sait pas ce qu'elle signifie.

$$\text{On a alors } \forall x \in] -1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Démonstration

On pourrait utiliser Taylor-Lagrange de nouveau, mais on va plutôt utiliser une méthode importante : la recherche de solutions développables en séries entières d'une équation différentielle.

Notons $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et remarquons que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$ et solution sur cet intervalle de l'équation

$$(1+x)y' - \alpha y = 0. \tag{E}$$



On cherche d'éventuelles solutions développables en série entière de (E).

Analyse Soit ϕ tel que pour tout $x \in]-r, r[$ (avec $r > 0$), $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels. (On suppose implicitement que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à r). Par théorème, ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$ et se dérive terme à terme. Ainsi,

$$\begin{aligned} \phi \text{ est solution de (E) sur }]-r, r[&\Leftrightarrow \forall x \in]-r, r[, (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-r, r[, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-r, r[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-r, r[, \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n] x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n \quad (1) \end{aligned}$$

(par unicité du développement en série entière.)

Synthèse Comme on a raisonné par équivalences, la seule chose à vérifier est que le rayon de convergence de la série entière est bien > 0 pour valider le raisonnement. Soit donc une suite vérifiant la relation de récurrence (1). S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$, alors (a_n) est constamment nulle et le rayon est $+\infty$.

Sinon, tous les a_n sont non nuls et on peut procéder par la règle de d'Alembert : $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \rightarrow |x|$ donc le rayon est 1.

Comme $f_\alpha(0) = 1$, par unicité de solution au problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et de la condition initiale $f(0) = 1$, on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$.

On calcule alors $a_1 = \alpha$, $a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!}$ (valable aussi pour $n=0$ car alors le produit vide vaut 1).

Remarque

R26 – Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme de Newton.

Corollaire 6 : DSE de $\frac{1}{1 \pm x}$

En particulier, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. ($R=1$)

5 $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$

Propriété 25 : DSE de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$

$x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont développables en série entière sur $] -1, 1[$ ($R=1$) et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^n}{n} \\ \forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \end{aligned}$$

Démonstration

Primitivation de séries entières géométriques.

Exercice 26 : En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En effet, le TSSA nous assure la convergence uniforme sur $[-1,0]$ et donc la continuité en -1 dans le DSE de $\ln(1-x)$.

6 Arctan, Arcsin

Propriété 26 : DSE de Arctan

Arctan est développable en série entière sur $] -1, 1[$ ($R = 1$) et

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Démonstration

Par primitivation.

Exercice 27 : Développer en série entière la fonction Arcsin.

Pour Arcsin, c'est moins simple et cela n'apparaît pas dans le programme. Donc pas à connaître par cœur.

On peut utiliser le fait que sur $] -1, 1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On trouve

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et pour Arccos ? C'est $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}$!

Exercice 28 : CCINP 51

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{Arcsin } x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4 (2n+3)} = \frac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} < 1$.

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.



De plus, $\forall u \in]-1, 1[, (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n$.

En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -t$:

$$R=1 \text{ et } \forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\dots(-(2n-1))}{2^n n!} (-t)^n.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2 \cdot 4 \dots 2n = 2^n n!$, on obtient :

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

$$\text{Conclusion : } R=1 \text{ et } \forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n.$$

3. D'après la question précédente, en remarquant que $x \in]-1, 1[\Leftrightarrow t = x^2 \in]0, 1[$ et $]0, 1[\subset]-1, 1[$, il vient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} \text{ avec un rayon de convergence } R=1.$$

Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ avec $\text{Arcsin}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.

De plus, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \text{Arcsin } x = \underbrace{\text{Arcsin } 0}_=0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \text{ avec un rayon de convergence } R=1.$$

4. Prenons $x = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$ dans le développement précédent.

$$\text{On en déduit que } \text{Arcsin} \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

C'est-à-dire, en remarquant que $\text{Arcsin} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)} = \frac{\pi}{3}$.

VI QUELQUES MÉTHODES

1 Développements en séries entières



Méthode 4

- Utilisation des DSE de fonctions usuelles : opérations usuelles, intégration, dérivation, produit de Cauchy.
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
- Utilisation d'une équation différentielle (voir preuve pour $(1+x)^\alpha$) :
 - Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R > 0$.
 - Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle (en général par équivalences).
 - En déduire ses coefficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
 - Vérifier qu'effectivement, le rayon est > 0 (synthèse).
 - Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

Exercice 29 : CCINP 2

On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

- Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
- En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve : $f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$.

2. D'après le cours, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.

De plus, on a $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Et, $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent).

On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière.

Et $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$.

C'est-à-dire : $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (4n+7)(-1)^n x^n$.

Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f .

D'après ce qui précède, $] -1, 1[\subset D$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum (4n+7)(-1)^n x^n$.

D'après ce qui précède $R \geq 1$.

Posons, pour tout entier naturel n , $a_n = (4n+7)(-1)^n$.

Pour $x = 1$ et $x = -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n x^n| = +\infty$ donc $\sum (4n+7)(-1)^n x^n$ diverge grossièrement.

Donc $R \leq 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

On en déduit que $D =]-1, 1[$.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

D'après le cours, g est de classe C^∞ sur $] -R, R[$.

De plus, $\forall x \in]-R, R[$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$g''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

et, par récurrence, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, g^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+p) a_{n+p} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p! a_p$.

C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}$.

(b) f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{p=0}^3 \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^3)$. (*)

Or, d'après 3.(a), pour tout entier p , $\frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ est aussi la valeur du p^{e} coefficient du développement en série entière de f .

Donc, d'après 2., pour tout entier p , $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = (4p+7)(-1)^p$. (**)

Ainsi, d'après (*) et (**), au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{p=0}^3 (4p+7)(-1)^p x^p + o(x^3)$.

C'est-à-dire, au voisinage de 0, $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

**Exercice 30 : CCINP 22**

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?
En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points?

1. Voir cours.

2. **Pour** $|x| < 1$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Pour $|x| < \frac{1}{2}$, $\ln(1-2x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

D'après 1., le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ vaut $\frac{1}{2}$.

Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ et est contenu dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

Et, pour $|x| < \frac{1}{2}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$.

Pour $x = \frac{1}{4}$:

la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ converge en $\frac{1}{4}$ et $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ est continue en ce point car

$$\left| \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{2}.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$:

la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\frac{1}{2}$ appartient au

disque de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$) et d'une série divergente (série harmonique).

Pour $x = -\frac{1}{2}$:

la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ converge en $-\frac{1}{2}$ comme somme de deux séries convergentes.

En effet :

D'une part, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\frac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

D'autre part,

$\sum_{n \geq 1} -\frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien positive, décroissante et de limite nulle).

La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée par le théorème d'Abel radial.

Remarque :

Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon $R > 0$.

On note f la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

La version du théorème d'Abel radial au programme assure que :

si $\sum a_n R^n$ converge alors $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

En considérant la fonction la fonction $x \mapsto f(-x)$ qui est la somme de la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$ (de rayon R), on a immédiatement l'extension suivante :

si $\sum a_n (-R)^n$ converge alors $\lim_{x \rightarrow -R^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$.

Exercice 31 : CCINP 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de \mathbb{R} , avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S .

Pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$.

Donc $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1}) x^n$.

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $] -R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$.

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.

Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n a_1$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :

$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $] -1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Prouvons que les solutions de (E) sur $]0, 1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.

Si toutes les solutions de (E) sur $]0, 1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, 1[$ serait égal à la droite vectorielle $\text{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \mapsto x(x-1)$, $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $]0, 1[$ et que la fonction $x \mapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, 1[$ est un plan vectoriel. D'où l'absurdité.

2 Calcul de somme d'une série entière



Méthode 5 : Utilisation des DSE des fonctions usuelles

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entières $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k , $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitives.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Intégration ou dérivation terme à terme.

Exercice 32 : CCINP 47 (a)

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

On note R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x , on pose $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

Pour x non nul, $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{3(n+1)x^2}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |3x^2|$.

Donc, d'après la règle de d'Alembert :

si $|3x^2| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument



et si $|3x^2| > 1$ c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.

On en déduit que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On pose : $\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

On a : $\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}$.

Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.

Ainsi : $\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, $S(x) = -\ln(1-3x^2)$.

Exercice 33 : CCINP 24

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

(b) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \text{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^n}{(2n)!}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

On en déduit que la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $R = +\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. (a) Pour $x \geq 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(t) = \text{ch}\sqrt{x}$.

Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.

(b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S .

S est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Cela prouve que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 34 : Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n} x^n$.

Par d'Alembert, $R = 2$ (ou parce que le rayon de convergence de $\sum n^2 x^n$ vaut 1).

$$\text{Puis } n^2 = n(n-1) + n \text{ donc } f(2x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

$$\text{Donc pour tout } x \in]-2, 2[, f(x) = \frac{2x^2+4x}{(2-x)^3}.$$

Exercice 35 : Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{(n-1)(n+2)} x^n$.

Par d'Alembert, $R = 1$ (ou parce que le rayon de convergence de $\frac{n}{(n-1)(n+2)} \sim \frac{1}{n}$).

Puis décomposition en éléments simples.

Exercice 36 : Une application des séries génératrices

En utilisant des séries entières, déterminer le terme général de la suite de Fibonacci donnée par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Soit la série entière $\sum F_n x^n$. Sous réserve d'un rayon de convergence $R > 0$, on a pour $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2}$ donc $f(x) - x = x^2 f(x) + x f(x)$ soit $(x^2 + x - 1)f(x) = -x$ et $f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$ lorsque $1 - x - x^2 \neq 0$.

Par DES, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x} \right)$ avec $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et on a bien un rayon de convergence > 0 , puis

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \psi^n \right) x^n$: on retrouve par unicité l'expression des termes de la suite de Fibonacci.