16

Intégrales à paramètres

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

Théorème 1 : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a \in \bar{J}$ éventuellement infini et $f : \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} g(t)$*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les $t \mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.*

C2 $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 2 : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ *On suppose*

H1 $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur X.*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x \in X,\ \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur X.*

Théorème 3 : Extension par domination locale

*On peut remplacer **H2** par*

H2 Hypothèse de domination locale *: Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction $\phi_V \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x' \in V,\quad \forall t \in I,\quad |f(x',t)| \leqslant \phi_V(t)$$

ou bien pour tout segment S de X, il existe une fonction $\phi_S \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall x \in S,\quad \forall t \in I,\quad |f(x,t)| \leqslant \phi_S(t)$$

III Classe d'une intégrale à paramètre

Théorème 4 : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ *On suppose*

H1 $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, de dérivée* $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

H2 $\forall x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\frac{\partial f}{\partial x}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J*

C2 $\forall x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 5 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ *et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée* $x \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.

H2 *Pour tout entier $j \in [\![0, k-1]\!]$, pour tout $x \in J$,* $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est **intégrable** sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J*

C2 $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $\forall x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

Corollaire 1 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{array}{|ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.*

H2 *Pour tout $x\in J$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:*
Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi_k\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur J telle que

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi_k(t).$$

Alors

C1 $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J*

C2 $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in J,\ t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$