16

Intégrales à paramètres

Les fonctions étudiées en mathématiques jusqu'à maintenant étaient construites à partir d'un petit nombre de fonctions dites *usuelles* (puissances, exponentielles, logarithmes, cosinus, sinus, etc.) et d'opérations algébriques (combinaisons linéaires, produit, quotient, composée, réciproque) ou analytiques (dérivation, intégration).

Les chapitres précédents ont permis d'étendre cette gamme de fonctions à l'étude de fonctions définies comme somme de série de fonctions, ce qui sera poursuivi dans le chapitre Séries Entières.

L'étude de phénomènes naturels en Physique et en Chimie conduit à l'utilisation de fonctions définies par des paramètres dépendant d'un (et même en général plusieurs) paramètre.

C'est le cas des fonctions de Bessel $J_n : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$, de la fonction Beta $\mathrm{B} : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$, de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ par exemple.

Le but de ce chapitre est d'étudier analytiquement ces fonctions. Il a été vu un résultat permettant de calculer des limites dans le chapitre précédent : le **théorème de convergence dominée**. Les résultats de ce chapitre résultent également d'une **hypothèse de domination** qu'il faut absolument maîtriser.

De nombreux sujets de concours sollicitent ce chapitre.

Dans le cadre du programme, toutes les fonctions de ce chapitre sont à valeurs réelles ou complexes : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $f : \left|\begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$, dans le but d'étudier $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, on notera pour $t \in I$ fixé, $f_t : x \in I \to f(x,t)$ l'application partielle associée, c'est-à-dire $f_t = f(\cdot,t)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f_t'(x)$ sa dérivée en un point x lorsque cela a un sens, puis $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = f_t^{(k)}(x)$ sa dérivée d'ordre k en x.

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

On rappelle l'extension du théorème de convergence dominée (sans les hypothèse de continuité par morceaux) aux paramètres réels, déduit du théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle de la limite, que l'on peut réécrire en utilisant les notations de ce chapitre en l'appliquant à la famille $(f_x : t \mapsto f(x,t))_{x \in J}$:

Théorème 1 : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a \in \overline{J}$ éventuellement infini et $f : \left|\begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$,*

H2 ***Hypothèse de domination** :*

Alors

C1

C2

Notons que la même extension aux paramètres dans un espace vectoriel de dimension finie ne coûte pas plus cher mais n'est pas mentionnée dans le programme. Dans ce cas, il faut repasser aux suites de fonctions via la caractérisation séquentielle. Ceci dit, la probabilité d'avoir besoin d'appliquer ce résultat dans autre chose que $\mathbb{R}$ est nulle.

Exercice 1 : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\ \mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 2 : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \left|\begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$,*

H2 ***Hypothèse de domination** :*

Alors

C1

Remarque

R1 – En toute rigueur, il manque une hypothèse « $\forall x \in X,\quad t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_m(I)$ » pour que l'intégrale ait bien un sens, que le programme autorise à ne pas vérifier dans la pratique.

Théorème 3 : Extension par domination locale

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \left|\begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$,*

H2 ***Hypothèse de domination locale** :*

Alors

C1

Exercice 2 : Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 : CCINP 50

III Classe d'une intégrale à paramètre

Théorème 4 : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$,*

H2 *Pour tout $x \in J$,*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$:*

Alors

C1

C2

Remarque

R2 – Encore une fois, on a omis une hypothèse (nécessaire mais dont la vérification n'est pas exigée par le programme officiel) « $\forall x \in J, \quad t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur I ».

R3 – ⚠ Attention à l'hypothèse **H2**, rendue nécessaire par l'absence d'hypothèse de domination appliquée à f, souvent oubliée...
Il s'agit simplement de la bonne définition de g. L'intégrabilité de la dérivée est, quant à elle, automatique.

R4 – Voir un parallèle avec la dérivation des suites/séries de fonction : convergence simple et convergence uniforme des dérivées devient intégrabilité et domination des dérivées...

Théorème 5 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$,*

H2 *Pour tout $x \in J$,*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$:*

Alors

C1

C2

Exercice 5 : Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
2. On définit, si $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$. Calculer la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que $F(x) \xrightarrow[x \to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.
   On pourra utiliser la fonction $g : x \to \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$.
4. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'.
5. En déduire I.

Exercice 6 : CCINP 30

Corollaire 1 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{vmatrix} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{vmatrix}$ On suppose

H1 *Pour tout $t \in I$,*

H2 *Pour tout $x \in J$,*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$:*

Alors

C1

C2

IV Étude de la fonction Γ (HP)

Un très grand classique ! C'est quasiment du cours, à connaître parfaitement.

Exercice 7 : On définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \,dt$.

1. **Déterminer l'ensemble de définition de Γ.**
2. **Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?**
3. **Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.**
4. **Montrer que Γ est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.**
5. **Montrer que Γ est une fonction convexe.**
6. **Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,b]$, que $(\Gamma')^2 \leqslant \Gamma\Gamma''$ et en déduire que Γ est $\ln$-convexe.**
7. **Montrer que Γ' s'annule en un $x_0 \in]1,2[$ et nulle part ailleurs.**
   On trouve numériquement que $x_0 \approx 1{,}46$ et $\Gamma(x_0) \approx 0{,}89$.
8. **Montrer que $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et en déduire sa limite.**
9. **Déterminer la limite en $+\infty$ de Γ.**
10. **Tracer son graphe.**
11. **Montrer que $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.**

Exercice 8 : CCINP 29