16 Intégrales à paramètres

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue ; — pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux ; — il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : — pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; — pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ; — pour tout $x\in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; — il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x\in A,\quad g'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Plan du cours

Les fonctions étudiées en mathématiques jusqu'à maintenant étaient construites à partir d'un petit nombre de fonctions dites *usuelles* (puissances, exponentielles, logarithmes, cosinus, sinus, etc.) et d'opérations algébriques (combinaisons linéaires, produit, quotient, composée, réciproque) ou analytiques (dérivation, intégration).

Les chapitres précédents ont permis d'étendre cette gamme de fonctions à l'étude de fonctions définies comme somme de série de fonctions, ce qui sera poursuivi dans le chapitre Séries Entières.

L'étude de phénomènes naturels en Physique et en Chimie conduit à l'utilisation de fonctions définies par des paramètres dépendant d'un (et même en général plusieurs) paramètre.

C'est le cas des fonctions de Bessel $J_n : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$, de la fonction Beta $\mathrm{B} : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$, de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ par exemple.

Le but de ce chapitre est d'étudier analytiquement ces fonctions. Il a été vu un résultat permettant de calculer des limites dans le chapitre précédent : le **théorème de convergence dominée**. Les résultats de ce chapitre résultent également d'une **hypothèse de domination** qu'il faut absolument maîtriser.

De nombreux sujets de concours sollicitent ce chapitre.

Dans le cadre du programme, toutes les fonctions de ce chapitre sont à valeurs réelles ou complexes : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $f : \left|\begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$, dans le but d'étudier $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, on notera pour $t \in I$ fixé, $f_t : x \in I \to f(x,t)$ l'application partielle associée, c'est-à-dire $f_t = f(\cdot,t)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f_t'(x)$ sa dérivée en un point x lorsque cela a un sens, puis $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = f_t^{(k)}(x)$ sa dérivée d'ordre k en x.

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

On a déjà vu (et admis) dans le chapitre précédent, le théorème de convergence dominée pour les suites d'intégrale (sans les hypothèse de continuité par morceaux) :

Théorème 1 : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ (c'est-à-dire positive et intégrable sur I) telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_n et f sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$

et son extension aux paramètres réels, déduit du théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle de la limite, que l'on peut réécrire en utilisant les notations de ce chapitre en l'appliquant à la famille $(f_x : t \mapsto f(x,t))_{x\in J}$:

Théorème 2 : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a \in \overline{J}$ éventuellement infini et $f : \left|\begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} g(t)$*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I,\quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les $t \mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$

Notons que la même extension aux paramètres dans un espace vectoriel de dimension finie ne coûte pas plus cher mais n'est pas mentionnée dans le programme. Dans ce cas, il faut repasser aux suites de fonctions via la caractérisation séquentielle. Ceci dit, la probabilité d'avoir besoin d'appliquer ce résultat dans autre chose que $\mathbb{R}$ est nulle.

Exercice 1 : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x>0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Changement de variable $u=xt$.

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 3 : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f:\left|\begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 $\forall t\in I,\quad x\mapsto f(x,t)$ *est continue sur X.*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in L^1\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ telle que*

$$\forall x\in X,\ \forall t\in I,\quad \left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

C1 $g:x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur X.*

Remarque

R 1 – En toute rigueur, il manque une hypothèse « $\forall x\in X,\quad t\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}_m(I)$ » pour que l'intégrale ait bien un sens, que le programme autorise à ne pas vérifier dans la pratique.

Démonstration

Montrer une continuité revient à calculer des limites. On va donc utiliser le théorème de convergence dominée.
Soit $a\in X$. On veut montrer que g est bien définie et $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}g(a)$.
La bonne définition de g est garantie par l'hypothèse de domination.

- Pour tout $t\in I$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}f(a,t)$ vu **H1** (avec $t\mapsto f(a,t)$ continue par morceaux sur I avec l'hypothèse omise).
- On a $\phi\in L^1\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ telle que $\forall x\in X,\quad\forall t\in I,\quad\left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$ vu **H2**.

D'après le théorème de convergence dominée, $g(x)=\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to a]{}\int_I f(a,t)\,\mathrm{d}t=g(a)$.
Donc g est continue en a. ■

Théorème 4 : Extension par domination locale

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f:\left|\begin{array}{ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur X.*

H2 ***Hypothèse de domination locale*** *:*

Pour tout $x\in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction $\phi_V\in L^1\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ telle que

$$\forall x'\in V,\quad\forall t\in I,\quad\left|f(x',t)\right|\leqslant\phi_V(t)$$

ou bien pour tout segment S de X, il existe une fonction $\phi_S\in L^1\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ telle que

$$\forall x\in S,\quad\forall t\in I,\quad\left|f(x,t)\right|\leqslant\phi_S(t)$$

Alors

C1 $g:x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur X.*

Démonstration

Alors g est continue au voisinage de tout point de X, donc sur X. ■

Exercice 2 : Transformée de Fourier

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\widehat{f}:x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Transformée de Laplace

Soit $f:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f):x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 : CCINP 50

On considère la fonction $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. **Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.**
2. **Prouver que $x\longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.**
3. **Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.**

---

1. Notons $f:\begin{cases}]0;+\infty[\times[0;+\infty[& \mapsto & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-2t}}{x+t}\end{cases}$

   (a) $\forall x\in]0;+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

   (b) $\forall t\in[0;+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

   (c) Soit $[a,b]$ un segment de $]0;+\infty[$.
   $\forall x\in[a,b]$, $\forall t\in[0;+\infty[$, $|f(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi:t\mapsto\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.

   En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\varphi(t)=0$, donc $\varphi(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0;+\infty[$.

   On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,
   $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$.

2. $\forall\,x\in]0;+\infty[$, $xF(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$.
   Posons $\forall\,x\in]0;+\infty[$, $\forall\,t\in[0;+\infty[$, $h_x(t)=\frac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}$.
   i) $\forall\,x\in]0;+\infty[$, $t\longmapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall\,t\in[0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h_x(t)=e^{-2t}$.
   La fonction $h:t\mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   iii) $\forall\,x\in]0;+\infty[$, $\forall t\in[0;+\infty[$, $|h_x(t)|\leqslant e^{-2t}$ et $t\mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}h_x(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-2t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=\frac{1}{2}$.

3. D'après 2., $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=\frac{1}{2}$, donc $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}$.

Autre méthode : le CV $u=x+t$ donne $F(x)=\mathrm{e}^{2x}\int_x^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\mathrm{d}u$ ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de $u\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}$ valant $u\mapsto-\dfrac{2u+1}{u^2}\mathrm{e}^{-2u}$, on « remarque » que $\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\underset{u\to+\infty}{\sim}\dfrac{2u+1}{2u^2}\mathrm{e}^{-2u}$, donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence, $F(x)\sim\mathrm{e}^{2x}\int_x^{+\infty}\dfrac{2u+1}{2u^2}\mathrm{e}^{-2u}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{2x}\left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{2u}\right]_x^{+\infty}=\dfrac{1}{2x}$.

Ou alors on effectue une IPP et on utilise un théorème d'intégration de o dans le cas de convergence.
D'où en particulier $xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

III Classe d'une intégrale à paramètre

Théorème 5 : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *On suppose*

H1 $\forall t\in I,\ \ x\mapsto f(x,t)$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, de dérivée* $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

H2 $\forall x\in J,\ \ t\mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi\in L^1\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ telle que*

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J*

C2 $\forall x\in J,\ \ t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

R2 – Encore une fois, on a omis une hypothèse (nécessaire mais dont la vérification n'est pas exigée par le programme officiel) « $\forall x\in J,\ \ t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur I ».

R3 – ⚠ Attention à l'hypothèse **H2**, rendue nécessaire par l'absence d'hypothèse de domination appliquée à f, souvent oubliée...
Il s'agit simplement de la bonne définition de g. L'intégrabilité de la dérivée est, quant à elle, automatique.

R4 – Voir un parallèle avec la dérivation des suites/séries de fonction : convergence simple et convergence uniforme des dérivées devient intégrabilité et domination des dérivées...

Démonstration

H3 et l'hypothèse omise de continuité par morceaux assurent l'existence de $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ pour $x\in J$ et **H2** assure celle de g.

Montrons que, si $a\in J$, $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

L'idée est de nouveau d'appliquer le théorème de convergence dominée.
Si $x\in J\setminus\{a\}$, $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \int_I \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\,\mathrm{d}t$. On pose $h(x,t) = \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}$.

- (Pour tout $x\in J\setminus\{a\}$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I.)
- Pour tout $t\in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ vu **H1** (avec $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ continue par morceaux.)
- On a $\phi\in L^1\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ telle que $\forall x\in J\setminus\{a\},\quad \forall t\in I,\quad |h(x,t)|\leqslant \phi(t)$ vu **H3** via l'inégalité des accroissements finis, $x\mapsto f(x,t)$ étant $\phi(t)$-lipschitzienne à t fixé au moins au voisinage de a.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc g est dérivable en a et $g'(a)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$.

Comme c'est vrai pour tout $a\in J$, g est dérivable sur J, g' a l'expression voulue, et en appliquant le théorème de continuité à $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$, on obtient que g est de classe $\mathscr{C}^1$. ■

Théorème 6 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f:\left|\begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *et $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose*

H1 *Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée $x\mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.*

H2 *Pour tout entier $j\in[\![0,k-1]\!]$, pour tout $x\in J$, $t\mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est **intégrable** sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\phi(t).$$

Alors

C1 $g:x\mapsto\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J*

C2 $\forall j\in[\![1,k]\!],\ \ \forall x\in J,\ \ t\mapsto\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(j)}(x)=\int_I\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 : Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. **Montrer que l'intégrale généralisée $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.**
2. **On définit, si $x\geqslant 0$, $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Calculer la limite de F en $+\infty$.**
3. **Montrer que $F(x)\xrightarrow[x\to 0]{}F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.**

   On pourra utiliser la fonction $g:x\to\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
4. **Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'.**
5. **En déduire I.**

Exercice 6 : CCINP 30

1. **Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.**
2. **Démontrer que la fonction $f:x\longmapsto\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.**
3. **(a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.**
   (b) Résoudre (E).

---

1. Voir ci-dessus.
2. On pose $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[,\ u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
   i) $\forall x\in\mathbb{R},\ t\longmapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall x\in\mathbb{R},\ |u(x,t)|\leqslant\mathrm{e}^{-t^2}$.

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2}=0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $e^{-t^2}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Donc, $t\longmapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
ii) $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-te^{-t^2}\sin(xt)$.
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. .
- $\forall t\in[0,+\infty]$, $x\mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
-iii) $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant te^{-t^2}=\varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.
En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi(t)=0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t)=o(\dfrac{1}{t^2})$.
On en déduit que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et comme elle est continue sur $[0,1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.
Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-te^{-t^2}\sin(xt)\,dt$

3. (a) On a, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-te^{-t^2}\sin(xt)\,dt$.
Procédons à une intégration par parties. Soit $A\geqslant 0$.

$$\int_0^A -te^{-t^2}\sin(xt)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^A-\int_0^A\frac{x}{2}e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$$

En passant à la limite quand $A\to+\infty$, on obtient $f'(x)+\dfrac{x}{2}f(x)=0$.
Donc f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\dfrac{x}{2}y=0$.

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x)=Ae^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A\in\mathbb{R}$.

En l'appliquant pour tout $k\in\mathbb{N}$, on obtient un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corollaire 1 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f:\left|\begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.*

H2 *Pour tout $x\in J$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi_k\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur J telle que*

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\phi_k(t).$$

Alors

C1 $g:x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J*

C2 $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad\forall x\in J,\quad t\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(k)}(x)=\displaystyle\int_I\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt.$

IV Étude de la fonction Γ (HP)

Un très grand classique ! C'est quasiment du cours, à connaître parfaitement.

Exercice 7 : On définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. **Déterminer l'ensemble de définition de** Γ.
2. **Montrer que pour tout** $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. **Que vaut** $\Gamma(n)$ **pour** $n \in \mathbb{N}^*$ **?**
3. **Montrer que** Γ **est continue sur son ensemble de définition.**
4. **Montrer que** Γ **est même de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.**
5. **Montrer que** Γ **est une fonction convexe.**
6. **Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur** $[a,b]$, **que** $(\Gamma')^2 \leqslant \Gamma\Gamma''$ **et en déduire que** Γ **est** $\ln$**-convexe.**
7. **Montrer que** Γ' **s'annule en un** $x_0 \in]1,2[$ **et nulle part ailleurs.**
   On trouve numériquement que $x_0 \approx 1{,}46$ ***et*** $\Gamma(x_0) \approx 0{,}89$.
8. **Montrer que** $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ **au voisinage de** 0^+ **et en déduire sa limite.**
9. **Déterminer la limite en** $+\infty$ **de** Γ.
10. **Tracer son graphe.**
11. **Montrer que** $\forall\, x>0,\ \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.

---

1. En effet, la fonction $f_x\ :\ t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive (utile pour avoir le droit d'utiliser des équivalents).
   - Intégrabilité sur $[1,+\infty[$: par croissances comparées, $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur x.
   - Intégrabilité sur $]0,1]$: $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1>-1$, i.e. $x>0$.
2. Par intégration par parties, si $0<a<A$,
$$\int_a^A e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[e^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_{t=a}^{t=A} + \frac{1}{x}\int_a^A e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t \tag{1}$$
   Mais, par croissances comparées,
$$e^{-A}\frac{A^x}{x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$
   et de plus
$$e^{-a}\frac{a^x}{x} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$
   On en déduit, en prenant les limites quand $a\to 0$ et $A\to+\infty$ dans (1),
$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$
   Comme $\Gamma(1)=1$, pour tout $n \geqslant 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. On définit
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ \times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$$
   Et on constate facilement que
   • Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.
   • Pour tout $t>0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

   Domination *La domination, pour la continuité de Γ, est à la fois un peu technique et très importante.*
   Soit $K=[a,b]$, $0<a<b$. On a
$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[\qquad 0 \leqslant e^{-t}t^{x-1} \leqslant \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t\leqslant 1 \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$$

Rien n'empêche une fonction « dominante » d'être définie par morceaux. Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :

$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[\qquad e^{-t}t^{x-1} \leqslant e^{-t}\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)$$

ou encore

$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[\qquad e^{-t}t^{x-1} \leqslant e^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)$$

4. On reprend

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$$

Et on constate facilement que f est indéfiniment dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} : (x,t) \longmapsto (\ln t)^k f(x,t)$$

En théorie, on peut ne dominer que la dernière dérivée partielle...mais il n'y en a pas ! On domine donc toutes les dérivées partielles.
Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque.

• Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

Domination : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $K = [a,b]$, $0 < a < b$. On a

$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \begin{cases} |\ln t|^k e^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ |\ln t|^k e^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

(il faut bien sûr s'assurer que la fonction dominante est intégrable : en 0 on compare = $\frac{1}{t^\alpha}$ avec $1-a<\alpha<1$ et en $+\infty$, on compare $\frac{1}{t^2}$).

5. Facile.
6. Appliquer Cauchy-Schwarz à $f : t \mapsto \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ et $g : t \mapsto \ln t\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ puis faire $a \to 0$ et $b \to +\infty$.
7. Théorème de Rolle, puis croissance stricte de Γ'.
8. $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$ par continuité.
9. La limite existe par monotonie et $\Gamma(n) = (n-1)! \to +\infty$.
10. À x fixé, Appliquer le théorème de convergence dominée à $f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{]0,n]}(t)$.
    Pour la domination, utiliser l'inégalité de convexité $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln x \leqslant x-1$.
    Dominatrice : $\phi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

Exercice 8 : CCINP 29

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. **Démontrer que :** $\forall x \in]0,+\infty[$, **la fonction** $t \mapsto f(x,t)$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

2. **Pour tout** $x \in]0,+\infty[$, **exprimer** $\Gamma(x+1)$ **en fonction de** $\Gamma(x)$.
3. **Démontrer que** Γ **est de classe** C^1 **sur** $]0,+\infty[$ **et exprimer** $\Gamma'(x)$ **sous forme d'intégrale.**

---

1. Soit $x \in]0,+\infty[$.
   La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   $f(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann avec $1-x<1$).
   Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. (*)
   De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$.
   Or $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**)
Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. Par intégration par parties $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \mathrm{e}^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}t^{x}]_{\varepsilon}^{A} + x\int_{\varepsilon}^{A} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
On passe ensuite à la limite quand $\varepsilon \to 0^{+}$ et $A \to +\infty$ et on obtient :
$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t = x\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
C'est-à-dire $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. i) pour tout $x>0$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après la question 1.).
ii) $\forall\, t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\forall\,(x,t) \in]0,+\infty[^{2}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
iii) Pour tout $x>0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
iv) Pour tout $t>0$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
v) Pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et $\forall\,(t,x) \in]0,+\infty[\times [a,b]$:
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$
avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
En effet :
$\varphi(t) \underset{0^{+}}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t)$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^{+}} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_1(t) = \lim_{t\to 0} t^{\frac{a}{2}}|\ln t| = 0$.
Donc, au voisinage de 0^{+}, $\varphi_1(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$.
Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1[$(fonction de Riemann avec $1-\dfrac{a}{2} < 1$).
Donc, φ_1 est intégrable sur $]0,1[$.
Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $]0,1[$. (*)

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{2}\varphi(t) = 0$.
Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\dfrac{1}{t^{2}})$.
Or, $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).
Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**)
D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe $\mathscr{C}^{1}$ sur $]0,+\infty[$.
De plus, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.