15

Limites d'intégrales

I Interversion limites et intégrales

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Alors

C1 *f est continue sur $[a, b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

2 Théorème de convergence dominée

Théorème 2 : de convergence dominée (version discrète)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions [continues par morceaux] définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1 *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f [continue par morceaux].*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ (c'est-à-dire positive et intégrable sur I) telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\quad |f_n(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_n et f sont intégrables sur I et* $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$

3 Extension du théorème

Théorème 3 : de Convergence Dominée (version continue)

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \overline{J}$ éventuellement infini.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions et f une fonction, définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes [et continues par morceaux sur I].

On suppose

H1 *Pour tout $x \in I$, $f_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} f(t)$.*

H2 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I,\quad |f_\lambda(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_λ et f sont intégrables sur I et* $\displaystyle\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f.$

II Interversion série-intégrale

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème 4 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $\displaystyle f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\displaystyle\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

Théorème 5 : Interversion séries-intégrales de fonctions à valeurs réelles positives

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(I^{\mathbb{R}^+}\right)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions [continues par morceaux sur I] à valeurs réelles positives. On suppose

H1 *La série $\sum f_n$ converge simplement sur I [, de somme continue par morceaux sur I].*

Alors

C1 $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$

(Égalité dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.)

3 Cas général

Théorème 6 : Interversion séries-intégrales, convergence N_1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(I^{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La série $\sum f_n$ converge simplement sur I [et sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I].*

H2 *Chaque f_n est intégrable sur I [et donc en particulier continue par morceaux sur I].*

H3 *La série $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ converge.*

Alors

C1 $\displaystyle\sum \int_I f_n$ *converge.*

C2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable sur I.*

C3 $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$

4 Mise en pratique

Méthode 1 : Interversion séries-intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Dans le cas réel positif, l'interversion peut être faite a priori, et on vérifie ensuite si les quantités manipulées sont finie ou $+\infty$.
2. Sinon, on peut appliquer le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
3. Si $I = [a,b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément.
   Le plus agréable serait qu'elle converge normalement [a], donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.
4. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geqslant 0$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.
   Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\displaystyle\int_a^b R_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur le séries alternées...)
   On peut aussi envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\displaystyle\int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $|S_n(t)|$.

a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.