15

Limites d'intégrales

I Interversion limites et intégrales

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1

H2

Alors

C1

C2

Remarque

R 1 – Un joli théorème mais qui demande
- d'être sur un segment,
- des fonctions continues dans le programme (mais continues par morceaux suffirait... sauf que le continuité par morceaux, contrairement à la continuité, ne se transmet pas par convergence uniforme),
- de la convergence uniforme !

Donc, dans la pratique, il ne s'applique pas si souvent...

2 Théorème de convergence dominée

Théorème 2 : de convergence dominée (version discrète)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions [continues par morceaux] définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1

H2 ***Hypothèse de domination*** :

Alors

C1

Démonstration

Hors-programme.

Remarque

R 2 – Pour être exact, le théorème demande aussi que les f_n et f soient continues par morceaux sur $[a,b]$, sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 3 – **« à valeurs réelles ou complexes »** est une hypothèse rendue nécessaire par le fait que lorsqu'on parle d'intégrales ailleurs que sur un segment, on se limite aux fonctions à valeurs complexes.

R 4 – **« continue par morceaux »** : déjà, la convergence uniforme ne transmet pas la continuité par morceaux (elle transmet la continuité), et ici on n'impose que la convergence simple, ce qui ne transmet vraiment rien du tout.

R 5 – La fonction ϕ est nécessairement à valeurs réelles positives.

R 6 – Sur un segment, lorsqu'il y a continuité et convergence uniforme, pas besoin de domination. Mais dans ce cas, il suffit de dominer par une fonction constante.

R 7 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_n.

Exercice 1 : Wallis

Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ converge, donner sa limite.

Remarque

R 8 – On rencontre beaucoup de suites monotones de fonctions (à ne pas confondre avec une suite de fonctions monotones : une suite croissante de fonctions, c'est une suite (f_n) telle que, pour tout n, $f_n \leqslant f_{n+1}$, autrement dit pour tout n et pour tout x, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$).
Si on ne sait pas par quoi dominer la famille f_n, on pourra donc essayer de dominer soit par la valeur absolue de la limite simple de la suite (f_n), soit par $|f_0|$ (ou $|f_1|$...).

Exercice 2 : Utilité de l'hypothèse de domination

Définissons, sur $[0,1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$, et prenant en $\frac{1}{n+2}$ la valeur $n+1$.

Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\displaystyle\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 : CCINP 25

Exercice 4 : CCINP 26

Exercice 5 : CCINP 27

3 Un découpage d'intégrale

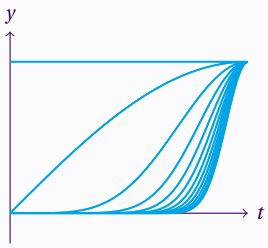
Exercice 6

On peut démontrer la convergence vers 0 de la suite des intégrales de Wallis sans utiliser le théorème de convergence dominée. On considère $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

On remarque d'abord que l'on est sur un segment, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(\sin^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Traçons des graphes de ces fonctions. On voit qu'elles concentrent leur intégrale au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, ce qui motive le découpage suivant : soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$



En déduire le résultat.

4 Extension du théorème

En utilisant le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite, on peut déterminer des limites d'intégrale avec un paramètre qui n'est pas nécessairement un entier.

On peut donner l'énoncé suivant qui n'est pas à connaître par cœur : dans la pratique, on peut repasser à la main par les suites. Mais l'énoncé est très proche du précédent !

Théorème 3 : de Convergence Dominée (version continue)

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \overline{J}$ éventuellement infini.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions et f une fonction, définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes [et continues par morceaux sur I].

On suppose

H1

H2 ***Hypothèse de domination*** :

Alors

C1

Remarque

R 9 – De nouveau, le théorème demande aussi que les f_λ et f soient continues par morceaux sur $[a,b]$, sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 10 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_λ, et en faisant tendre λ vers λ_0 dans la domination, on obtient celle de f.

Exercice 7 : Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ a une limite quand $x \to +\infty$; la calculer.

Exercice 8 : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) \, \mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Exercice 9 : Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente

Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge. On définit, si $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Calculer la limite de F en $+\infty$. Puis montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g : x \to \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Remarque

R 11 – Lorsque l'on saura dériver ce type de fonctions, cela nous permettra de retrouver la valeur de I : cela revient sous quelques hypothèses à dériver sous le signe intégral, ce qui permet de montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x$.

Exercice 10 : CCINP 50

puis retrouver les résultats de l'exercice à l'aide d'un changement de variable.

II INTERVERSION SÉRIE-INTÉGRALE

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème 4 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1

H2

alors

C1

C2

C3

2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

Théorème 5 : Interversion séries-intégrales de fonctions à valeurs réelles positives

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(I^{\mathbb{R}^+}\right)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions [continues par morceaux sur I] à valeurs réelles positives. On suppose

H1

Alors

C1

(Égalité dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.)

Remarque

R 12 – De nouveau, le théorème demande aussi que les f_n et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soient continues par morceaux sur I, sans quoi les intégrales n'auraient pas de sens, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 13 – En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n < +\infty$.

Démonstration

Hors programme. ■

3 Cas général

Théorème 6 : Interversion séries-intégrales, convergence N_1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(I^{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{N}}$, une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

Démonstration

Hors programme. ■

Remarque

R 14 – De nouveau, le théorème demande aussi que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ soit continue par morceaux sur I, mais le programme dit explicitement que ce sont des hypothèses qu'on se permet de ne pas vérifier/justifier.

R 15 – On note en général $N_1(f_n) = \int_I |f_n|$. L'hypothèse cruciale **H3** s'écrit alors : $\sum N_1(f_n)$ converge.

4 Mise en pratique

Méthode 1 : Interversion séries-intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Dans le cas réel positif, l'interversion peut être faite a priori, et on vérifie ensuite si les quantités manipulées sont finie ou $+\infty$.
2. Sinon, on peut appliquer le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
3. Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément.

   Le plus agréable serait qu'elle converge normalement[a], donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.
4. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geqslant 0$, $S = \sum_{k=0}^{n} f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur le séries alternées...)
On peut aussi envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_a^b S_n(t)\mathrm{d}t$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $|S_n(t)|$.

a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.

Exercice 11

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 12

On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit, sur $\mathbb{R}$, $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)f(t)\mathrm{d}t = a_m$.

Exercice 13

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 14 : CCINP 19

Exercice 15 : CCINP 49