14

Intégrales généralisées

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

I Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente en $+\infty$

Définition 1 : Intégrale convergente en $+\infty$

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Propriété 1 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Propriété 2 : Intégrales exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Propriété 3 : Linéarité

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

Alors $\int_a^{+\infty} (f+\lambda g)$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (f+\lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$

Propriété 4 : Choix de la borne inférieure

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $b \in [a,+\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ ont même nature.

Si elles convergent, $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Propriété 5 : Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$

Soient $f \in \mathscr{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ tel que $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Alors $\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $\varphi' = -f$.

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété 6 : Cas des fonctions réelles positives

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante, et $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si F est majorée.

Définition 2 : Intégrale de fonction positive

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

On pose $\int_a^{+\infty} f$ la limite finie ou $+\infty$ de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Théorème 1 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, tel que

H1 $\int_a^{+\infty} g$ *converge*

H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(g),$$

alors

C1 $\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

Théorème 2 : Divergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, tel que

H1 $\int_a^{+\infty} g$ *diverge*

H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$0 \leqslant g \leqslant f \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(f) \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(f),$$

alors

C1 $\int_a^{+\infty} f$ *diverge.*

Théorème 3 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ ont même nature.

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Définition 3 : Fonction intégrable

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a,+\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente.**

On note $f \in L^1([a,+\infty[, \mathbb{K})$.

Théorème 4 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

La réciproque est fausse en général mais vrai pour des fonctions de signe constant.

Théorème 5 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[, \mathbb{R}^+)$.

- *On suppose que*

  H1 *g est intégrable sur $[a,+\infty[$*

  H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{O}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{o}(g),$$

  alors

  C1 *f est intégrable sur $[a,+\infty[$.*

- *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si g l'est.*

Corollaire 1 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[, \mathbb{K})$.

- *Si g est intégrable sur $[a,+\infty[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : au voisinage de $+\infty$,*

$$|f| \leqslant |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{O}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{o}(g),$$

  alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

- *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si g l'est.*

II Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 4 : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ (respectivement $]a,b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

Lorsque f **est à valeur réelles positives** et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

On dit que f est **intégrable** sur $[a,b[$ (respectivement $]a,b]$) lorsque $\int_a^b |f|$ converge, et on note $f \in L^1([a,b[, \mathbb{K})$ (respectivement $f \in L^1(]a,b], \mathbb{K})$.)

Propriété 7 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur $[1,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,-1]$) si et seulement si $\alpha > 1$.*
- $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur $]0,1]$ (respectivement $[-1,0[$) si et seulement si $\alpha < 1$.*

Théorème 6 : Intégrabilité par comparaison, cas positif

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b[, \mathbb{R}^+)$.

- *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et que l'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } b,\ f \leqslant g \ \text{ou}\ f = \underset{b}{O}(g) \ \text{ou}\ f = \underset{b}{o}(g),$$

  alors f est intégrable sur $[a,b[$.

- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$ en comparant au voisinage de a.

Corollaire 2 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$.

- *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : au voisinage de b,*
$$|f| \leqslant |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{o}(g),$$
alors f est intégrable sur $[a,b[$.
- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$ en comparant au voisinage de a.

Propriété 8 : Indépendance du choix de l'autre borne

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, $c \in [a,b[$.

Alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$.

Propriété 9 : Cas d'une fonction prolongeable par continuité

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f continue par morceaux sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f a une limite finie en b, c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

Alors f est intégrable sur $[a,b[$.

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.

2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition 5 : Convergence d'intégrale et intégrabilité sur un intervalle ouvert

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a,b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note
$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que f est **intégrable** sur $]a,b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge et on note $f \in L^1(]a,b[,\mathbb{K})$.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème 7 : L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I. Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f$ converge.

Propriété 10 : Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$

- *L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cet espace vectoriel est noté $L^1(I,\mathbb{K})$.*
- *L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.*

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I,
$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Propriété 12 : Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \mathfrak{Re}(f)$ et $\int_I \mathfrak{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \mathfrak{Re}(f) + \mathrm{i}\int_I \mathfrak{Im}(f)$.

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale

Méthode 1 : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle bornée sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable. C'est le cas par exemple si la fonction est continue et prolongeable par continuité en une borne ouverte (et c'est alors encore plus simple à justifier : il suffit de considérer l'intégrale sur un segment du prolongement, qui ne présente pas de problème).
- Si I est un intervalle ouvert $]a,b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a,b[$ et on est ramené à une étude sur $]a,c]$ et $[c,b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \cdots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.

S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.

Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

III Propriétés des intégrales généralisées

1 Relation de Chasles

Propriété 13 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

(i) Si J sous-intervalle de I, alors $\int_J f$ converge.

(ii) Si $a, b, c \in \overline{I}$ éventuellement infinis,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

toutes ces intégrales étant bien convergentes.

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriétés 1 : liées à l'ordre

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité : $f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_I f \geqslant 0.$

Croissance : $f \leqslant g \Longrightarrow \int_I f \leqslant \int_I g.$

Positivité améliorée : *Si f est positive, **continue** sur I et si $\int_I f = 0$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.*

*De façon équivalente, si f est positive, **continue**, non identiquement nulle sur I alors $\int_I f > 0$.*

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété 14 : Dérivation

Les bornes ouvertes peuvent être éventuellement infinies.

Si f est continue sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$ et $g' = -f$.

Si f est continue sur $]a, b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$ et $h' = f$.

IV Changements de variable, intégrations par parties

1 Changement de variable

Théorème 8 : Changement de variable

*Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une **bijection** de classe $\mathscr{C}^1$. Alors φ est strictement monotone.*

On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow[u \to \alpha]{} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u \to \beta]{} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Propriété 15 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (respectivement $]a, b]$) si et seulement si $\alpha < 1$.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par partie sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

V INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Théorème 9 : Intégration des relations de comparaison

*Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs **réelles positives**.*

Cas de divergence *Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathcal{O}}(g)$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g\right)$*

(ii) *si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right)$*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$*

Cas de convergence *Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathcal{O}}(g)$, alors f intégrable et $\displaystyle\int_x^b f = \underset{b}{\mathcal{O}}\left(\int_x^b g\right)$*

(ii) *si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors f intégrable et $\displaystyle\int_x^b f = \underset{b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f intégrable et $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.