

Intégrales généralisées

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

1 INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente en $+\infty$

Définition 1 : Intégrale convergente en $+\infty$

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque

Dans ce cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Remarque

R1 – Lorsque $\int_a^{+\infty} f$ diverge, l'objet $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ n'a aucun sens... sauf dans le cas où f est à valeurs réelles positives (cf partie suivante).

Exemple

E1 – $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

E2 – $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$

Propriété 1 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si

Propriété 2 : Intégrales exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si

Exercice 1 : Cas particulier d'intégrales de Bertrand

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

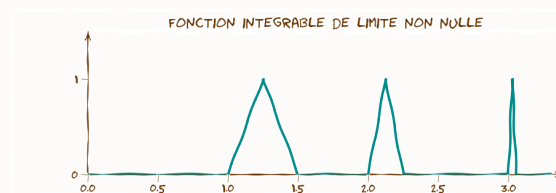
Remarque

R2 – $\sum u_n$ converge $\implies u_n \rightarrow 0$. Ce n'est plus le cas

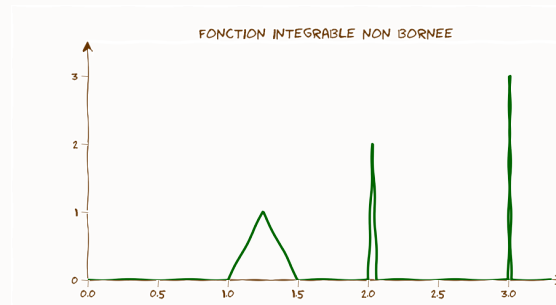
pour la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.

Par exemple, si on considère la fonction f nulle partout sauf entre n et $n + \frac{2}{n^2}$ où elle dessine un triangle isocèle de hauteur 1, d'aire $\frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 2$. Alors

$f \geq 0$, $\int_a^x f \leq \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6} - 1$ et $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante donc $\int_a^{+\infty} f$ converge, et pourtant $f(x) \neq 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.



On peut même construire une fonction f non bornée dont l'intégrale converge : il suffit que les triangles soient de hauteur n et de base $\frac{2}{n^3}$.



Par contre, si f a une limite non nulle, l'intégrale diverge.

Propriété 3 : Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

Alors $\int_a^{+\infty} (f + \lambda g)$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (f + \lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$



Propriété 4 : Choix de la borne inférieure

Propriété 5 : Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$

Soient $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tel que $\int_a^{+\infty} f$ converge.
Alors

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété 6 : Cas des fonctions réelles positives

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.
Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

$\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si

Définition 2 : Intégrale de fonction positive

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.
On pose $\int_a^{+\infty} f$ la limite finie ou $+\infty$ de
 $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ en $+\infty$.

Remarque

R3 – On se permet donc d'écrire $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence, **seulement dans le cas où f est à valeurs réelles positives.**

Théorème 1 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, tel que

H1
H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

alors

C1

Remarque

R4 – Similaire aux séries.
Il est indispensable que les fonctions soient à valeurs positives!

Théorème 2 : Divergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, tel que

H1
H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

alors

C1

Théorème 3 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 3 : Fonction intégrable

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a, +\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et que

On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente**.
On note $f \in L^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Exemple

E3 – **Intégrales de Riemann** : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
E4 – **Intégrales exponentielles** : $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème 4 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
La réciproque est fautive en général mais vrai pour des fonctions de signe constant.

Remarque

R5 – Le programme stipule que « Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. »
C'est puissant! On peut travailler dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque la fonction est positive, et obtenir l'intégrabilité lorsque le résultat n'est pas $+\infty$.

Remarque

R6 – Une intégrale $\int_a^{+\infty} f$ convergente mais non absolument convergente et dite semi-convergente.
R7 – Comme on l'a vu avec cet exemple, dans la pratique, pour procéder à une intégration par partie, on se ramène à une borne finie x puis on passe à la limite. Cela évite de risquer d'écrire des termes qui n'existent pas. Voir plus loin.

Théorème 5 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

■ On suppose que

H1 g est intégrable sur $[a, +\infty[$

H2 L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée

$$f \leq g \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathfrak{o}}(g),$$

alors

C1 f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

■ Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Remarque

R8 – Si les fonctions ne sont pas à valeurs positives, on met des valeurs absolues/modules.

Ainsi, si $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tel que g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et $(f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g)$ ou $f = \underset{+\infty}{\mathfrak{o}}(g))$, alors $(|f| = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(|g|)$

ou $|f| = \underset{+\infty}{\mathfrak{o}}(|g|))$ donc $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Et si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$ et $\int_a^{+\infty} |f|$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} |g|$ converge.

Corollaire 1 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

■ Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : au voisinage de $+\infty$,

$$|f| \leq |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathfrak{o}}(g),$$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

■ Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Exercice 2 : CCINP 25 question 1.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3

Montrer que $x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4

Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 : Classique : intégrales de Bertrand

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). (Même résultat que sur les séries.)

4 Comparaison série-intégrale (complément)

Le résultat suivant est désormais hors-programme mais intéressant.

Exercice 6

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

H1 f est continue par morceaux,

H2 f est décroissante,

H3 f est positive

alors

C1 $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

II INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 4 : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) à valeurs dans \mathbb{K} .

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$ cette limite.



Lorsque f est à valeur réelles positives et que $\int_a^b f(t) dt$ diverge, on note $\int_a^b f(t) dt = +\infty$.
 On dit que f est **intégrable** sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b[$) lorsque $\int_a^b |f|$ converge, et on note $f \in L^1([a, b[, \mathbb{K})$ (respectivement $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$.)

Remarque

- R 9 – On dit aussi que f est intégrable en b (respectivement en a).
- R 10 – Si la borne ouverte est finie et que f possède une limite finie au point, il suffit de faire un prolongement par continuité : on est ramené à une intégrale sur un segment.
 Par exemple, $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ converge sans problème.
- R 11 – Le programme stipule que « Pour une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^+ , un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence. »

Exemple

E 5 – \tan n'est pas intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Propriété 7 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, -1]$) si et seulement si
- $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (respectivement $[-1, 0[$) si et seulement si

Exemple

E 6 – $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$

Théorème 6 : Intégrabilité par comparaison, cas positif

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$ et que l'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée
 Au voisinage de b , $f \leq g$ ou $f = o_b(g)$ ou $f = o_b(g)$,
 alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.
 On a un énoncé analogue sur $]a, b[$ en comparant au voisinage de a .

Remarque

R 12 – Et de nouveau, si les fonctions ne sont pas réelles positives (ni de signe constant), on passe aux valeurs absolues / modules.

Corollaire 2 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : au voisinage de b ,

$$|f| \leq |g| \text{ ou } f = o_b(g) \text{ ou } f = o_b(g),$$

alors f est intégrable sur $[a, b[$.

- Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.
 On a un énoncé analogue sur $]a, b[$ en comparant au voisinage de a .

Propriété 8 : Indépendance du choix de l'autre borne

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[, c \in [a, b[$.

Alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.

Propriété 9 : Cas d'une fonction prolongeable par continuité

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que f a une limite finie en b , c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en une fonction \tilde{f} continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors f est intégrable sur $[a, b[$.

On a un énoncé analogue sur $]a, b[$.

2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition 5 : Convergence d'intégrale et intégrabilité sur un intervalle ouvert

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

On dit que f est **intégrable** sur $]a, b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge et on note $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$.

Exemple

E7 – Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Remarque

R13 –  Il faut démontrer la convergence des deux intégrales séparément!

Exemple

E8 – $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan t dt$ diverge alors que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\int_{-x}^x \tan t dt = 0$.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

Théorème 7 : L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale


Soit f continue par morceaux sur I . Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f$ converge.

Propriété 10 : Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$

- L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel. Cet espace vectoriel est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.
- L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.

Remarque

R14 – Donc si f, g intégrables sur I , alors $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

R15 –  Comme pour les séries, il faut y réfléchir à deux fois avant de séparer une intégrale généralisée en deux : on a vite fait de manipuler des termes qui n'existent pas... Mais dans le cas des fonctions **positives**, le programme autorise de travailler dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

R16 – C'est encore le cas en prenant plus généralement les fonctions dont l'intégrale converge. Cependant, l'espace vectoriel en question n'a pas de nom particulier.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I ,

Propriété 12 : Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \Re(f)$ et $\int_I \Im(f)$ convergent.

Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \Re(f) + i \int_I \Im(f)$.

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale



Méthode 1 : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle bornée sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable. C'est le cas par exemple si la fonction est continue et prolongeable par continuité en une borne ouverte (et c'est alors encore plus simple à justifier : il suffit de considérer l'intégrale sur un segment du prolongement, qui ne présente pas de problème).
- Si I est un intervalle ouvert $]a, b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a, b[$ et on est ramené à une étude sur $]a, c[$ et $]c, b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \dots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.

S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.

Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolute convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

Exercice 7

$x \mapsto \cos^3(1/x)$ sur $]0, 1[$.

Exercice 8

Étudier l'existence de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ où $x \in \mathbb{R}$.



Exercice 9

Existence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

R 17 – Mauvaise rédaction :

$$\left| \int_0^x e^{-t} \sin(xt) dt \right| \leq \int_0^x e^{-t} dt \leq 1 \dots$$

Comme pour les séries, c'est à la fonction qu'on s'intéresse et non aux « intégrales partielles ».

Exercice 10 : CCINP 28

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Croissance :

Positivité améliorée :

De façon équivalente, si f est positive, **continue**, non identiquement nulle sur I alors

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété 14 : Dérivation

Les bornes ouvertes peuvent être éventuellement infinies.

Si f est continue sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$ et $g' = f$.
Si f est continue sur $]a, b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b]$ et $h' = f$.

Remarque

R 19 – Se retrouve avec une primitive.

IV CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES

1 Changement de variable

Théorème 8 : Changement de variable

Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une **bijection** de classe \mathcal{C}^1 . Alors φ est strictement monotone. On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow{u \rightarrow \alpha} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow{u \rightarrow \beta} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles). Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Remarque

- R 20 – Même nature est à prendre au sens convergentes ou divergentes ou absolument convergentes ou semi-convergentes. C'est donc **très utile** pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.
- R 21 – Le programme autorise l'utilisation sans justification dans les cas usuels : φ fonction affine, puissance, exponentielle, logarithme.

III PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Relation de Chasles

Remarque

R 18 – La notion d'intégrale généralisée se... généralise au cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens.

Propriété 13 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

- (i) Si J sous-intervalle de I , alors $\int_J f$ converge.
- (ii) Si $a, b, c \in \bar{I}$ éventuellement infinis,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

toutes ces intégrales étant bien convergentes.

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriétés 1 : liées à l'ordre

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité :

R 22 – Mais il vaut mieux insister. Faire un changement de variable avec une rédaction de la forme : « Changement de variable $t = \varphi(u)$ où $\varphi : \dots \rightarrow \dots$ **bijectif et de classe \mathcal{C}^1** ». On peut alors exprimer $u = \varphi^{-1}(t)$.

R 23 – Sur un segment, la bijectivité n'était pas nécessaire, ici elle l'est.

Exercice 11

Trouver un lien entre l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 12

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ à l'aide des intégrales de Wallis $W_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k t dt$.

Exercice 13

Déduire de l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, celle de ces mêmes intégrales sur $]0, \frac{1}{2}]$, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Propriété 15 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $]b, a[$ (respectivement $]a, b[$) si et seulement si

Remarque

R 24 – Plus généralement, via un changement de variable, la fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par partie sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

Remarque

R 25 – Le programme donne tout de même un résultat, qu'on évitera d'utiliser : si f et g ont des limites finies en a et en b (« si le crochet existe »), les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes (mais seulement l'une peut être semi-convergente contrairement au changement de variable). Et en cas de convergence, on peut écrire

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

(ou le crochet est à prendre au sens des limites.) Il est largement préférable, dans la pratique, de re-

passer par une intégration par partie classique sur un segment, avant de passer à la limite.

Exercice 14

Si $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 : CCINP 19

Prouver que, pour tout entier naturel n , $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1[$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$.

V INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Théorème 9 : Intégration des relations de comparaison

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs réelles positives.

Cas de divergence Si $\int_a^b g$ diverge et

(i) si $f = o_b(g)$, alors

(ii) si $f = o_b(g)$, alors

(iii) Si $f \sim_b g$, alors

Cas de convergence Si $\int_a^b g$ converge et

(i) si $f = o_b(g)$, alors f intégrable et

(ii) si $f = o_b(g)$, alors f intégrable et

(iii) Si $f \sim_b g$, alors f intégrable et

On a un énoncé analogue sur $]a, b[$.

Remarque

R 26 – Noter l'analogie avec les sommes partielles et les restes des séries.

R 27 – Comme pour les séries, la fonction de référence est toujours à valeurs réelles positives.

Exercice 16

Soit la fonction $f : x \mapsto \int_1^x e^{t^2} dt$.

- Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.