

Régularité des suites et séries de fonctions

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, X une partie non vide \mathbb{R} .

SUITES DE FONCTIONS

1 Intégration sur un segment

Théorème 1 : Interverson limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathcal{K}^{[a,b]}$ tel que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$
- H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

- C1 f est continue sur $[a, b]$
- C2 $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.



Méthode 1 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Théorème 2 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathcal{K}^I , $a \in I$. On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .
- H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,
- C2 $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I .

2 Dérivation

Théorème 3 : Interverson limite et dérivée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathcal{K}^I . On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I .
- H3 La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g .

Alors

- C1 f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- C2 $f' = g$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)' = \lim f'_n$ ».
- C3 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Théorème 4 : Généralisation à la classe \mathcal{C}^k

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathcal{K}^I , $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^k sur I .
- H2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement vers une fonction g_j sur I .
- H3 La suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k .

Alors

- C1 $f = g_0$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .
- C2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(j)} = g_j$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ ».
- C3 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Théorème 5 : Généralisation à la classe \mathcal{C}^∞

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathcal{K}^I . On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
- H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I .
- H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k .

Alors

- C1 f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
- C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$ ».



II SÉRIES DE FONCTIONS

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème 6 : Intersion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$
- H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

- C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.
- C2 $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge.
- C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$.

2 Primitive

Théorème 7 : Intersion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $a \in I$. On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .
- H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I .

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,
- C2 La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.

3 Classe \mathcal{C}^k

Théorème 8 : Classe \mathcal{C}^k d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^k sur I .
- H2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I .
- H3 La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .
- C2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.
- C3 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Théorème 9 : Classe \mathcal{C}^∞ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

- H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
- H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .
- H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
- C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.