11

Intégration sur un segment des fonctions numériques (MP2I)

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \ ; \ \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_{[a,b]} \psi \ ; \ \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

Définition 1 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \varphi\leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \psi\geqslant f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{Im}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

La première définition a un intérêt uniquement théorique.

Notation 1

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$, $\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$ et $\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 1 : de l'intégrale sur un segment d'une fonction CPM

Si I intervalle, $a,b \in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ *est linéaire.*

(ii) *Si $a \leqslant b$, $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Si $b \leqslant a$, $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.

(iii) ⚠ *En général, si $a,b \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$,*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) *Si $a,b,c \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$, $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Propriété 2 : Positivité améliorée

*Si f est **continue** sur $[a,b]$; et **de signe constant**,*

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

Propriété 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

II Sommes de Riemann

Définition 2 : Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(\xi_k)$$

Théorème 1 : Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) *$h(\sigma)$ désignant le pas de σ,*

$$S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f.$$

(ii) *Si, de plus, f est K-lipschitzienne,*

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

Corollaire 1 : Cas simples

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a<b$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

En particulier, si $a=0$ et $b=1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

III Intégrale et primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Propriété 4

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*

Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I,\ F(x) = G(x) + C$.

Théorème 2 : fondamental de l'Analyse

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 2 : du théorème fondamental

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

(iv) ***Inégalité des accroissements finis** : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Propriété 5 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to \mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

Propriété 6 : Intégration par parties

Si u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 7 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

IV Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)

Méthode 1 : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

1 Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

2 L'intégration par parties

Fonction dont la dérivée est plus simple...
...comme par exemple les fonctions $\ln, \text{Arccos}, \text{Arcsin}, \text{Arctan}$, etc.

Abaissement du degré, formule de récurrence

3 Le changement de variable

On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

On veut calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$
Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x $(t = \varphi^{-1}(x))$. Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

4 Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan.

5 Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

Règles de Bioche

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$!!

6 Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\text{ch}, \text{sh}, \text{th}$ et $\exp$, on peut poser $t = e^x$ $\left(\text{ch}\, x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \text{sh}\, x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \text{th}(x) = \frac{t^2-1}{t^2+1}.\right)$

Si l'on a une fraction rationnelle en $\text{ch}, \text{sh}, \text{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\text{ch}, \text{sh}, \text{th}$ par $\cos, \sin, \tan$ respectivement.

7 Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$, il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x + \beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \text{sh}\, u$ $(\text{sh}^2+1 = \text{ch}^2)$ ou $t = \tan u$ $\left(1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}\right.$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm\text{ch}\, u$ suivant le signe de t. $(\text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2.)$
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ $(1-\cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2.)$

V Formules de Taylor

Définition 3

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

1 Taylor reste intégrale

Propriété 8 : Formule de Taylor avec reste intégral

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f **est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété 9 : Inégalité de Taylor-Lagrange

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f **est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Corollaire 3 : Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$.

3 Formule de Taylor-Young

Propriété 10 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un DL$_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un DL$_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Propriété 11 : Formule de Taylor-Young

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f **est de classe $\mathscr{C}^n$ sur** I, $a \in I$.*

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$