11

Intégration sur un segment des fonctions numériques (MP2I)

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \;;\; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_{[a,b]} \psi \;;\; \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

Définition 1 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \psi \geqslant f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{Im}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

La première définition a un intérêt uniquement théorique.

Notation 1

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$ et $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 1 : de l'intégrale sur un segment d'une fonction CPM

Si I intervalle, $a,b \in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}\right.$ *est linéaire.*

(ii) *Si $a \leqslant b$, $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Si $b \leqslant a$, $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.

(iii) ⚠ *En général, si $a,b \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$,*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) *Si $a,b,c \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$, $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Propriété 2 : Positivité améliorée

*Si f est **continue** sur $[a,b]$; et **de signe constant**,*

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

Voir exercice du TD : 3 à 9

Propriété 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

Exercice 1 : CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. **(a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. **Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.**
   Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

---

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
   On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|(x|y)| \leqslant ||x||\,||y||$
   Preuve :
   Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$.

   On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda) = (x+\lambda y | x+\lambda y)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(|)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda(x|y) + ||x||^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors $|(x|y)| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y \neq 0$
   Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
   Et donc, $|(x|y)| \leqslant ||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
   Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|(x|y)| = ||x||\,||y|| \Longleftrightarrow x$ et y sont colinéaires.
   Supposons que $|(x|y)| = ||x||\,||y||$.

   Premier cas : si $y = 0$
   Alors x et y sont colinéaires.
   Deuxième cas : si $y \neq 0$
   Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
   C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
   Donc x et y sont colinéaires.
   Supposons que x et y soient colinéaires.

   Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|(x|y)| = |\alpha|.|(y|y)| = |\alpha|||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}\,||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
On pose $A = \left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$.
$A \subset \mathbb{R}$.
$A \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.
Soit $f \in E$.
On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.
D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :
$\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\forall f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.
Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f: t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

Exercice 2 : CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. **Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. **Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**
   On pose : $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. **Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

---

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
On pose $\forall x \in [a,b],\ F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
De plus, $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = h(x)$.
Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)
D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.
Donc $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = 0$.
C'est-à-dire, $\forall x \in [a,b],\ h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E$. $(f|f) = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geqslant 0$.
Donc $(|)$ est positive. (**)
Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

Alors $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
Donc $(|)$ est définie. (***)
D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

II Sommes de Riemann

Définition 2 : Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)f(\xi_k)$$

Théorème 1 : Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) $h(\sigma)$ désignant le pas de σ,

$$S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f.$$

(ii) Si, de plus, f est K-lipschitzienne,

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

Démonstration

- On fait une première démonstration dans le cas où f est continue sur $[a,b]$. Elle y est donc uniformément continue en vertu du théorème de Heine.
  Soit $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$.
  Soit $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)f(\xi_k)$ une somme de Riemann sur une subdivision σ de pas $h \leqslant \eta$.

$$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left((a_{k+1}-a_k)f(\xi_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \big(f(\xi_k)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\xi_k)-f(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  par inégalité triangulaire. Pour $x, \xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$, $|\xi_k - x| \leqslant |a_{k+1}-a_k| \leqslant h \leqslant \eta$ donc $|f(\xi_k)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ainsi,

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

On a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall \sigma, \xi,\ h(\sigma) \leqslant \eta \Longrightarrow \left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon.$$

- Si f est K-lipschitzienne (c'est le cas si f est $\mathscr{C}^1$ par exemple), le calcul est plus simple :

$$\left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)|\, dx \leqslant K \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\xi_k - x|\, dx$$
$$\leqslant K h(\sigma) \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = K h(\sigma)(b-a)$$

ce qui permet aussi de retrouver le résultat précédent.
- Voici finalement une démonstration dans le cas général où f est seulement continue par morceaux. L'idée est de montrer le résultat d'abord pour une fonction indicatrice de segment, puis, par linéarité, de l'étendre aux fonctions en escalier, puis, par approximation uniforme, aux fonctions continues par morceaux.

Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $[a,b]$ et $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$.

Si $[c,d]$ ne contient aucun des ξ_i, $\left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| = d - c \leqslant h(\sigma)$.

Sinon, soient des entiers i et j éventuellement confondus tels que $a_{i-1} \leqslant \xi_{i-1} < c \leqslant \xi_i \leqslant \xi_j \leqslant d < \xi_{j+1} \leqslant a_{j+2}$.

Alors $S(f,\sigma,\xi) = a_{j+1} - a_i \leqslant a_{j+2} - a_{i-1}$ avec $a_{j+2} - a_{i-1} \geqslant d - c = \int_a^b f$ et

$$a_{j+2} - a_{i-1} = \left(a_{j+2} - \xi_{j+1}\right) + \left(\xi_{j+1} - d\right) + (d-c) + \left(c - \xi_{i-1}\right) + \left(\xi_{i-1} - a_{i-1}\right) \leqslant h(\sigma) + 2h(\sigma) + \int_a^b f + 2h(\sigma) + h(\sigma) = \int_a^b f + 6h(\sigma)$$

Donc $\left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| \leqslant 6h(\sigma)$, majoration encore valable dans le premier cas.

On en déduit bien que pour $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$, $S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f$.

Ensuite, par combinaison linéaire, le résultat se transmet aux fonctions en escalier.

Enfin, si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\varepsilon > 0$, par approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier, on a fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, et on a $\eta > 0$ tel que si $h(\sigma) \leqslant \eta$, $\left| S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors , si $h(\sigma) \leqslant \eta$,

$$\left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| = \left| S(f,\sigma,\xi) - S(\varphi,\sigma,\xi) + S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi + \int_a^b \varphi - \int_a^b f \right|$$
$$\leqslant \left| S(f-\varphi,\sigma,\xi) \right| + \left| S(\varphi,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi \right| + \left| \int_a^b (\varphi - f) \right|$$
$$\leqslant 2(b-a)\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Corollaire 1 : Cas simples

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a < b$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

En particulier, si $a = 0$ et $b = 1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

Remarque

R 1 – À cause du $\frac{1}{n}$, ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 25}^{n-1 \text{ ou } n-2 \text{ ou } n+12} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

Exercice 3

Limite de $\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$. Retrouver la nature de la série harmonique.

Exercice 4

Calculer $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right) \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Voir exercice du TD : 13 à 16

III Intégrale et primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Propriété 4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I, avec I ***intervalle****.*
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + C$.

Théorème 2 : fondamental de l'Analyse

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 2 : du théorème fondamental

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

(iv) ***Inégalité des accroissements finis*** *: Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Propriété 5 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to \mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \begin{array}{|lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

Exercice 5 : Ex CCINP 56

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Voir exercice du TD : 11, 12

Propriété 6 : Intégration par parties

Si u,v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

$$\forall\, a,b\in I,\quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=\big[u(t)v(t)\big]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6

Équivalent de $f(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t\ln t\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

$f(x)=\mathrm{e}^x\ln x-\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ et si $x\geqslant 1$, $0\leqslant\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant \mathrm{e}^x-\mathrm{e}=\mathrm{o}(\mathrm{e}^x\ln x)$.

Propriété 7 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi:[\alpha,\beta]\to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

IV Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)

Méthode 1 : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

1 Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u'\times v'(u)$ qui s'intègre en $v\circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

2 L'intégration par parties

Fonction dont la dérivée est plus simple... ...comme par exemple les fonctions $\ln$, Arccos, Arcsin, Arctan, etc.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Abaissement du degré, formule de récurrence

Exercice 8

Calculer $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

3 Le changement de variable

On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f\circ\varphi$.

On veut calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

4 Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$
$$\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan.

5 Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

Règles de Bioche

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$!!

Exercice 9

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5 t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$.

6 Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ et $\exp$, on peut poser $t = e^x$ ($\mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ par $\cos, \sin, \tan$ respectivement.

7 Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x + \beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x + \beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \mathrm{sh}\, u$ ($\mathrm{sh}^2 + 1 = \mathrm{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \mathrm{ch}\, u$ suivant le signe de t. ($\mathrm{ch}^2 - 1 = \mathrm{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1 - \cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2$.)

Exercice 11

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Voir exercice du TD : 1, 2

V FORMULES DE TAYLOR

Définition 3

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

Voir exercice du TD : 17, 18, 19

1 Taylor reste intégrale

Propriété 8 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** $\mathscr{C}^{n+1}$ ***sur*** I, $a \in I$. *Pour tout* $x \in I$,

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

R 2 – À connaître **PARFAITEMENT**.
Pour s'en rappeler : tester pour $n = 0$ et plus de a sous l'intégrale.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété 9 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** $\mathscr{C}^{n+1}$ ***sur*** I, $a \in I$. *Pour tout* $x \in I$,

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Remarque

R 3 – Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $p = 0$?

Corollaire 3 : Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$.

3 Formule de Taylor-Young

Propriété 10 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un DL$_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un DL$_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Remarque

R 4 – ⚠ On peut aussi dériver un DL terme à terme **à condition de savoir que f' admet un DL.**

Propriété 11 : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe $\mathscr{C}^n$ sur*** *I, $a \in I$.*

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

Remarque

R 5 – L'hypothèse du programme officiel est f de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a.