Dérivabilité

- Le théorème de Rolle est d'usage courant mais seulement valable pour les fonctions à valeurs réelles. Il existe des extensions en ouvrant des bornes et en remplaçant les valeurs par les limites (voir exercice 4).
- De même, le théorème des accroissements finis n'est plus valable si la fonction n'est pas à valeurs réelles. Mais l'inégalité est valable dans un cadre beaucoup plus large. Par contre il faut alors se limiter à des majorations.
- Le théorème « de la dérivée » est un théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. Mais attention : on ne prolonge pas une dérivée, on prolonge la fonction et on obtient sa dérivabilité au point.
- Un développement limité à l'ordre 1 donne la dérivabilité (et la dérivée) en un point. Ce n'est plus vrai à partir de l'ordre 2.

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a)=f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1 CCINP 3 : Formule de Leibniz

2 CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

3 Très classique (jusqu'à 4.)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. (Oral X)
   (a) Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b)\neq(0,0)$, $aP+bP'$ est scindé.
   (b) Montrer que si $P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est scindé, $\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}$ est scindé.
   Indication : utiliser l'endomorphisme $P(D)$ où D est l'endomorphisme de dérivation.

4

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

5 Généralisations du théorème de Rolle

1. Si f est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to b]{} f(a)$, à valeurs réelles, montrer que la conclusion du théorème de Rolle tient toujours.
2. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.
3. Soient $a\in\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

6 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{Arctan}^{(n)} : x\mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

7 Théorème de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

8

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $|f'|\leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{\overline{f(b)-f(a)}}{b-a}f(t)\right) \end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

9 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b)$.

1. Montrer que
$$\forall\, x\in[a,b],\ \ \exists\,\xi_x\in[a,b],\ \ f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x).$$
Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.
2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ et $T(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$,
$$\left\|f-P_n\right\|_\infty\leqslant\frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\|T\|_\infty.$$

10 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que
$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

11 Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^e est de la forme $x\mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
   On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x\leqslant 0$, $\phi(x)=0$.
   Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x\mapsto\phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a<c<d<b$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

Convexité

- Pour démontrer des inégalités, il faut penser à la convexité.
- En général (et heureusement), les fonctions rencontrées sont dérivables voire deux fois dérivables. La monotonie de f' ou le signe de f'' permet alors de conclure plus facilement sur la convexité ou la concavité de f.
- La définition et les caractérisations de la convexité sont alors utilisées comme conséquences de celle-ci. Y penser pour les résultats plus théoriques en particulier.
- Parfois, le plus difficile est de reconnaître une inégalité de convexité. Penser par exemple à utiliser $\ln$ si l'inégalité se présente sous forme de produit.

Exercices vus en cours

12 Montrer qu'une fonction convexe sur I est admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\mathring{I}$. Est-ce le cas sur I ?

13 Montrer les inégalités suivantes

1. **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_*^+$,
   $$\sqrt[n]{x_1\cdots\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$
   Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\dfrac{1}{x_i}$?
2. $\forall\,x>-1,\ \ln(1+x)\leqslant x.$
3. $\forall\,x\in\mathbb{R},\ e^x\geqslant 1+x.$
4. $\forall\,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x.$

Parties convexes

14 **Enveloppe convexe**

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.

Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?

15 **Points extrémaux** Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :

$$\forall(a,b)\in C^2\qquad x\in[a,b]\Longrightarrow\Big(x=a\quad\text{ou}\quad x=b\Big)$$

Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n\geqslant 2$.
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.
Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

16 **Théorème de Gauss-Lucas**

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\frac{P'}{P}$.

Fonctions convexes

17 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g\ :\ I\longrightarrow\mathbb{R}$ tels que $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

18
1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec $\ln$ (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

19 Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1}:f(I)\to I$.

20 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,x\geqslant 0,\ \ x^{n+1}-(n+1)x+n\geqslant 0.$

21 Montrer que $\forall(x,y)\in]1,+\infty[^2$ on a : $\ln\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{\ln x\ln y}$.

22 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que

$$f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1) \leqslant \frac{1}{4}.$$

23 Montrer que parmi les polygones convexes inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

24 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. *(On pourra raisonner par l'absurde.)* Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

25 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

26 **Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a<b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) + (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $x=f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

27 Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $1+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

28 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.)

29 **Fonctions mid-convexes**

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.
(On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y) = \Big\{t \in [0,1] \mid f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\Big\}$$

contient tous les $\frac{k}{2^n}$...)

30 Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x)-\ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.