

Réduction (1^{re} partie)

Sauf mention contraire, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que toute projection peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
- Calculer l'inverse de M lorsque c'est possible.

Solution de 2 :

- Par opérations élémentaires, M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$: $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg}(B-A)$ en s'intéressant aux endomorphismes induits ou en échelonnant les blocs diagonaux ou en utilisant des matrices J_r .
- Résoudre $M \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec A et $B-A$ inversibles.

3 Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

- Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u .
- Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \text{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u .
- Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, à coefficients entiers.

4 Montrer $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

5 CCINP 83 : valeur propre de composée

Solution de 5 : CCINP 83 : valeur propre de composée

- Soit $\lambda \neq 0$.
Si λ valeur propre de $u \circ v$ alors $\exists x \in E \setminus \{0\} / (u \circ v)(x) = \lambda x$. (*)

Pour un tel x non nul, on a alors $v(u \circ v(x)) = \lambda v(x)$ c'est-à-dire $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$ (**).
Si $v(x) = 0$ alors, d'après (*), $\lambda x = 0$. Ce qui est impossible car $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.
Donc $v(x) \neq 0$.
Donc, d'après (**), $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre λ .
- On trouve que $v \circ u = \text{Id}$ et $u \circ v : P \mapsto P(X) - P(1)$.
Ainsi $\text{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et $\text{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$.
On observe que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
On constate donc que le résultat de la question 1. est faux pour $\lambda = 0$.

3. Si E est de dimension finie, comme $\det(u \circ v) = \det u \det v = \det(v \circ u)$ alors :

0 est valeur propre de $u \circ v \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0$ est valeur propre de $v \circ u$.

Remarque 1 : le résultat de la question 1. est vrai pour $\lambda = 0$ si et seulement si E est de dimension finie.

Remarque 2 : Si E est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et A^t ont même polynôme caractéristique.

7 Montrer qu'en dimension impaire, une matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

8 CCINP 72 : endomorphismes de rang 0 ou 1

Solution de 8 : CCINP 72 : endomorphismes de rang 0 ou 1

1. Si $v = 0_E$ alors f est l'endomorphisme nul et donc $\operatorname{rg} f = 0$.

Si $v \neq 0$ alors $\operatorname{rg} f = 1$ car, si on note c_1, c_2, \dots, c_n les colonnes de la matrice A de f dans la base canonique e , alors $c_1 \neq 0$ et $c_1 = c_2 = \dots = c_n$.

2. **Premier cas** : $v = 0_E$

alors f est l'endomorphisme nul et donc f est diagonalisable.

Deuxième cas : $v \neq 0_E$.

Alors $\operatorname{rg} f = 1$ et donc $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$.

Donc 0 est valeur propre de f et, si on note m_0 l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme caractéristique de f , alors $m_0 \geq n - 1$.

On en déduit alors que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / P_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$. (*)

Et donc, $\operatorname{tr}(f) = \lambda$.

e est une base de E donc : $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n / v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.

En écrivant la matrice de f dans la base e , on obtient alors $\operatorname{tr}(f) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Ainsi, $\lambda = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. (**)

Ce qui amène à la discussion suivante :

Premier sous-cas : si $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$

D'après (*) et (**), $\lambda = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ est une valeur propre non nulle de f et $\dim E_\lambda = 1$.

Ainsi, $\dim E_0 + \dim E_\lambda = n$ et donc f est diagonalisable.

Deuxième sous-cas : si $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$

Alors, d'après (*) et (**), $P_f(X) = X^n$.

Donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité n dans le polynôme caractéristique.

Or $\dim E_0 = n - 1$.

Donc f n'est pas diagonalisable.

Remarque dans le cas où $v \neq 0$

Comme $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, alors, par linéarité de f , $f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n)$.

C'est-à-dire, $f(v) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)v$. (***)

On en déduit que : $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \iff f(v) = 0$.

De plus, dans le cas où $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$, alors, d'après (**), v est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et d'après ce qui précède, $E_f(\lambda) = \operatorname{Vect}(v)$.

9 Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

10 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

11 CCINP 67 : diagonalisation dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

Solution de 11 : CCINP 67 : diagonalisation dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

$$\chi_M(X) = \det(XI_3 - M).$$

Après calculs, on trouve, $\chi_M(X) = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

Premier cas : $ca - ba - bc < 0$

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.

Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$

Alors, 0 est la seule valeur propre de M .

Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$.

Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.

On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$

Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

12 CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes**Solution de 12 : CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes**

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.

Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.

On en déduit que $\forall P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.

Donc $f(E) \subset E$. (**)

D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E .

(a) Déterminons $\text{Ker } f$.

Soit $P \in \text{Ker } f$.

$f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.

Or, d'après ce qui précède, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.

Donc $P = 0$.

On en déduit que $\text{Ker } f = \{0\}$.

Donc f est injectif.

Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

(b) Soit $e = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E . Soit A la matrice de f dans la base e .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.

Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.

D'après 1. : $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.

$P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$, ..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.

Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).

Tout revient à se demander si A est diagonalisable.

Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A .

D'après 1.(b), on a $P_A(X) = (X - 1)^{n+1}$.

Donc 1 est l'unique valeur propre de A .

Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1} .

On aurait donc $A = I_{n+1}$.

Ce qui est manifestement faux car $f \neq \text{Id}$.

Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

Solution de 13 : CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.

Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
 Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.
 Donc $\operatorname{rg} A = 3$.

Deuxième cas : $a = 0$
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} A = 2$.

Troisième cas : $a = -1$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} A \geq 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.

Or $\det A = 0$ donc $\operatorname{rg} A \leq 2$.
 On en déduit que $\operatorname{rg} A = 2$.

2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A .

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1 + a & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

Donc, en développant par rapport à la première colonne,

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1).$$

$$\text{Donc } \chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1).$$

Les racines de χ_A sont $a+1$, $-a$ et -1 .

$$a+1 = -a \iff a = -\frac{1}{2}.$$

$$a+1 = -1 \iff a = -2.$$

$$-a = -1 \iff a = 1.$$

Ce qui amène aux quatre cas suivants :

Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$

Alors A admet trois valeurs propres distinctes.

Donc A est diagonalisable.

Deuxième cas : $a = 1$

$$\chi_A = (X-2)(X+1)^2.$$

Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(A + I_3) = 1$.

$$\text{Or } A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \operatorname{rg}(A + I_3) = 1.$$

Donc A est diagonalisable.

Troisième cas : $a = -2$

$$\text{Alors, } \chi_A = (X+1)^2(X-2).$$

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes de $A + I_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\operatorname{rg}(A + I_3) \geq 2$.

De plus, -1 est valeur propre de A , donc $\operatorname{rg}(A + I_3) \leq 2$.

Ainsi, $\operatorname{rg}(A + I_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.

Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a = -\frac{1}{2}$

$$\chi_A = (X - \frac{1}{2})^2(X + 1).$$

$$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de $A - \frac{1}{2}I_3$ sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) \geq 2$.

De plus, $\frac{1}{2}$ est valeur propre donc $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) \leq 2$.

Ainsi, $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.

Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A est non diagonalisable.

14 CCINP 70 : réduction de matrice circulante

Solution de 14 : CCINP 70 : réduction de matrice circulante

1. $\chi_A(X) = (X^3 - 1)$ donc $\text{Sp}A = \{1, j, j^2\}$.

On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.

On pose $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$, $E_j(A) = \text{Ker}(A - jI_3)$ et $E_{j^2}(A) = \text{Ker}(A - j^2I_3)$.

Après résolution, on trouve $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_j(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right)$.

Et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$.

2. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{C}^3 , vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On pose $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, j^2, j)$, $e'_3 = (1, j, j^2)$ et $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

D'après 1., e' est une base de vecteurs propres pour f .

Soit P la matrice de passage de e à e' . On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

Alors, $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.

On en déduit que $B = aI_3 + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$.

C'est-à-dire, si on pose $Q = a + bX + cX^2$, alors $B = P \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(j) & 0 \\ 0 & 0 & Q(j^2) \end{pmatrix} P^{-1}$.

On en déduit que B est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de B sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

Premier cas : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

B possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

De plus, on peut affirmer que :

$$E_{Q(1)}(B) = E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{Q(j)}(B) = E_j(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{Q(j^2)}(B) = E_{j^2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right).$$

Deuxième cas : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.

Supposons par exemple que $Q(1) = Q(j)$ et $Q(j^2) \neq Q(1)$.

B possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.

De plus, on peut affirmer que :

$$E_{Q(1)}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{Q(j^2)}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right).$$

Troisième cas : $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.

B possède une unique valeur propre : $Q(1)$.

De plus, on peut affirmer que $B = Q(1)I_3$ et $E_{Q(1)}(B) = \mathbb{C}^3$.

15 Matrices compagnes Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne $(a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K})$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

16 Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n , $\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$

Solution de 16 :

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout n , $X_n = A^n X_0$.

Or $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

D'où x_n, y_n, z_n exprimés en fonction de x_0, y_0, z_0 .

On peut même calculer le résultat sans calculer P^{-1} !

Si on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, $Y_{n+1} = DY_n$ donc $Y_n = D^n Y_0$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n(\lambda + \mu) + 2^n \nu \\ (-1)^{n+1} \lambda + 2^n \mu \\ (-1)^{n+1} \mu + 2^n \nu \end{pmatrix}$.

17 Trouver le commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18 CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2

Solution de 18 : CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\text{Sp}A = \{-2, 3\}$.

Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :

$$E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{-2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right).$$

2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$ND = DN \iff \begin{cases} -2b = 3b \\ 3c = -2c \end{cases} \iff b = c = 0 \iff N \text{ diagonale.}$$

$$\text{On a } A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPD^{-1} \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \iff P^{-1}MP \text{ commute avec } D.$$

$$\text{C'est-à-dire, } AM = MA \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Donc, l'espace des matrices commutant avec } A \text{ est } C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

C'est un plan vectoriel.

De plus, pour des raisons d'inclusion ($I_2 \in C(A)$ et $A \in C(A)$) et d'égalité des dimensions, $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.

19 Trouver les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution de 19 :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, a, b, c, d, i \in \mathbb{R} \right\}$.

$N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ racine de D ssi $\begin{pmatrix} a^2+bd & b(a+e) & 0 \\ d(a+e) & e^2+bd & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = D$

Mais si on a $a+e \neq 0$, alors $b=d=0$ et $a^2 = -1$ ce qui n'est pas possible sur \mathbb{R} .

Donc N racine de D si et seulement si $e = -a$, $a^2 + bd = -1$ et $j^2 = 2$.

$\mathcal{R}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} s\sqrt{-1-bd} & b & 0 \\ d & -s\sqrt{-1-bd} & 0 \\ 0 & 0 & t\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}; b, d \in \mathbb{R}; bd \leq -1; s, t \in \{-1, 1\} \right\}$.

20 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

21 $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Éléments propres et diagonalisation

22 1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} & = & x_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

24 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.
2. Diagonaliser A .
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

27 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

28 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si A^T l'est.

29 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$

30 On souhaite démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} en utilisant l'exercice suivant.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

31 **Densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$ lorsque pour tout (i, j) , $a_{i,j}^{(k)} \rightarrow a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que toute matrice de rang r est équivalente à J_r .

32 **Matrices circulantes** Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.

2. En déduire la détermination dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$.

33 **Matrices de rang 1**

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme XY^T où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A . Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

34 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A .
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A .
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

35 Théorème de Gerschgorin En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante

($\forall i, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

3. Trigonalisation

36 CCINP Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A puis déterminer une matrice de passage rendant la matrice A semblable

$$\text{à } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de 36 : CCINP

$$\chi_A = (X-1)^3.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

37 CCINP : convolution Pour $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$A \star B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(B).$$

1. Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $(A \star B)(A' \star B') = (AA') \star (BB')$.
2. En déduire que $A \star B$ est inversible si et seulement si A et B le sont.
3. Déterminer le spectre de $A \star B$.
4. En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \star B$.

Solution de 37 : CCINP : convolution

1. Produit par blocs.
2. S'intéresser à $A^{-1} \star B^{-1}$.
Si A n'est pas inversible, utiliser une matrice A' telle que $AA' = 0$.
3. Trigonaliser.
4. Si les λ_i et μ_j sont les valeurs propres de A et B comptées avec multiplicité,

$$\chi_{A \star B} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (X - \lambda_i \mu_j).$$

$$\det(A \star B) = (\det(A) \det(B))^n.$$

$$\text{tr}(A \star B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B).$$

38 Très classique : trigonalisation simultanée On suppose que le corps de base est \mathbb{C} et u et v sont deux endomorphismes qui commutent. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.

Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Solution de 38 : Très classique : trigonalisation simultanée

Le corps de base étant algébriquement clos, $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. v laisse stable $\text{Ker}(u - \lambda Id)$, car v et $u - \lambda Id$ commutent. Et donc v induit sur $\text{Ker}(u - \lambda Id)$ un endomorphisme v_λ . Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de v_λ est un vecteur propre de v qui est dans $\text{Ker}(u - \lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u .

Montrons par récurrence la propriété \mathcal{P}_n : « si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = PT'P^{-1}$ ».

Pour $n = 1$, c'est bien clair.

Montrons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de \mathbb{C}^{n+1} canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer \mathcal{P}_n , il existe donc $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que

$$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$

Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.

39 ✦ **Centrale**

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $B \in \mathbb{K}[A]$ ou $A \in \mathbb{K}[B]$.
2. Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$?

Solution de 39 : Centrale

1. Les cas où A est scalaire ou diagonale se traitent facilement.
 Dans le cas où A est de la forme $(\lambda \ \mu / 0 \ \lambda)$, on vérifie que B a une forme similaire et on trouve un polynôme $P \in \mathbb{K}_1[X]$ tel que $B = P(A)$.
 Dans le cas général, on peut se ramener à l'un des cas précédent par réduction de A .

2. On trouve un contre-exemple. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

40 ★ **Centrale-Mines Ponts** Montrer que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{tr} A^k = \text{tr} B^k.$$

41 ★ **X** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr} A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module < 1 .

Solution de 41 : X

Trigonaliser puis raisonner par récurrence sur le nombre de valeurs propres distinctes de A .

4. Réduction par blocs

42 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur \mathbb{R} et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

43 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

Solution de 43 :

On résout $MX = \lambda X$ par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda^2 X_1 \end{cases}$$

On voit que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A , et les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes (l'application

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ dans $E_\lambda(M)$). En utilisant la caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on en déduit

M est diagonalisable si et seulement si A l'est et toutes les valeurs propres de A ont deux racines carrées distinctes.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par exemple, M est diagonalisable si et seulement si A l'est et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

44 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que N est diagonalisable et semblable à M . Préciser les sous-espaces propres de N .

Solution de 44 :

1. Si A et B sont diago(resp. trigo)nalisable, on a P, Q inversibles et D, D' diagonales (resp. T, T' triangulaires) telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$ (resp. $A = PTP^{-1}$ et $B = QT'Q^{-1}$).
Alors $M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$), les matrices extrêmes étant inverses l'une de l'autre, la matrice interne étant diagonale (resp. triangulaire).
2. Comme $\chi_N = \chi_A \chi_B$, $\text{Sp } N = \text{Sp } A \sqcup \text{Sp } B$.

Soit $\lambda \in \text{Sp } A$ (donc $\lambda \notin \text{Sp } B$), $N \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} AX_1 + CX_2 = \lambda X_1 \\ BX_2 = \lambda X_2 \end{cases}$ si et seulement si ($\lambda \notin \text{Sp } B$)

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda X_1 \\ X_2 = 0_{q,1} \end{cases}$$

Donc $E_\lambda(N) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_1 \in E_\lambda(A) \right\}$ qui a comme dimension $\dim E_\lambda(A)$ (soit via un isomorphisme, soit en exhibant une base, ce n'est pas difficile.)

Puis si $\mu \in \text{Sp } B$ (donc $\mu \notin \text{Sp } A$), $N \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} AX_1 + CX_2 = \mu X_1 \\ BX_2 = \mu X_2 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} X_2 \in E_\mu(B) \\ X_1 = M_\mu X_2 \end{cases}$

où $M_\mu = (\mu I_p - A)^{-1}C$ est bien défini ($\mu \notin \text{Sp } A$).

Donc $E_\mu(N) = \left\{ \begin{pmatrix} M_\mu X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}, X_2 \in E_\mu(B) \right\}$ de dimension $\dim E_\mu(B)$ car

$$X_2 \in E_\mu(B) \mapsto \begin{pmatrix} M_\mu X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \in E_\mu(N)$$

est un isomorphisme.

On a alors $p + q = \sum_{\lambda \in \text{Sp } A} \dim E_\lambda(A) + \sum_{\mu \in \text{Sp } B} \dim E_\mu(B) = \sum_{\rho \in \text{Sp } N} \dim E_\rho(N)$ et N est diagonalisable.

Enfin, comme $\chi_N = \chi_A \chi_B = \chi_M$, N a les mêmes valeurs propres que M avec même multiplicité, les deux étant diagonalisables : elles sont semblables.

5. Matrices et endomorphismes nilpotents

45 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

46 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u : \begin{matrix} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{matrix}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

47 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

48 Montrer que sur \mathbb{C} , une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

Est-ce encore vrai sur \mathbb{R} ?

49 **Commutant d'un endomorphisme nilpotent** Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n .

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .
2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (u^{n-1}(a), \dots, u(a), a)$.
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $v \in (\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$.
Indication : on pourra introduire les coordonnées de $v(a)$ dans la base \mathcal{B} .

50 **Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathcal{F} = (a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est une famille libre de E .
3. Retrouver le fait que $p \leq n$
4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.

(a) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim \text{Ker } u^k = k$.

(c) Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geq 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F , montrer que $F = \text{Ker } u^k$.

51 ✦ **Mines-Ponts** Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr } A^k = 0$.

52 ★ Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N .

2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à $I_n + N$.

(On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P = X^n Q$ à l'aide d'une division euclidienne.)

Solution de 52 :

1. Penser à des séries géométrique et vérifier que $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \dots + N^{n-1}$ et une formule analogue pour $I_n + N$.

2. Le DL de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 au voisinage de 0 s'écrit $\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n)$ où P_n est un polynôme connu (en écrivant $(1+x)^{1/2}$). En élevant au carré, on obtient $1+x = P_n^2(x) + o(x^n)$.

Donc $P_n^2(x) - 1 - x = o(x^n)$. Posons la division euclidienne de $P_n^2 - 1 - X$ par X^n : $P_n^2 - 1 - X = X^n Q + R$. Alors $\frac{P_n^2(x) - 1 - x}{x^n} = Q(x) + \frac{R(x)}{x^n} \rightarrow 0$. Mais comme le degré de R est au plus $n-1$ et $Q(x) \rightarrow Q(0)$, on en déduit que nécessairement $R = 0$.

On a alors $P_n^2 - 1 - X = X^n Q$ puis en évaluant en N dont l'indice de nilpotence est au plus n , $P_n^2(N) - 1 - N = N^n Q(N) = 0_n$,

donc $1 + N = (P_n(N))^2$ donc $P_n(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-k+1)}{k!} N^k$ répond à la question.